В. И. РОДИЧЕВ

ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ В ОРТОГОНАЛЬНОМ РЕПЕРЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
МОСКОВСКОЕ ОБЩЕСТВО ИСПЫТАТЕЛЕЙ ПРИРОДЫ
(секция физики)

В. И. РОДИЧЕВ

ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ В ОРТОГОНАЛЬНОМ РЕПЕРЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1974

УДК 530.12 : 531.51

Теория тяготения в ортогональном репере. **Родичев В. И.** М., «Наука», 1974, 184 стр.

В монографии приводится описание теории тяготения с помощью формализма ортогональных реперов (тетрад), позволяющего представить все результаты теории, а не только уравнения Эйнштейна, в общековариантной форме. При этом многие соотношения теории тяготения повторяют соотношения электродинамики. Это дает возможность подойти к физической интерпретации аппарата теории. Устанавливаются простые выражения для комплексов энергии и момента гравитационного поля. Рассматривая ряд точных волновых решений уравнений Эйнштейна, удается проанализировать вопрос о переносе энергии гравитационными волнами.

Подробно рассматриваются трудности теории, связанные с определением энергии и момента гравитационного поля.

Много уделено внимания описанию геометрического представления систем отсчета. В основу кладется гипотеза Эйнштейна о том, что метрика неинерциальных систем обусловлена локальными лоренцевыми сокращениями. Даются примеры метрик, имеющих различный характер симметрии.

Формализм ортогональных реперов и его приложения излагаются в виде, пригодном для самостоятельного изучения предмета как научными работниками, так и студентами вузов.

Табл. 4. Библ. 43 назв.

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук

Д. Д. ИВАНЕНКО

Р $\frac{20402\text{-}0474}{042\,(01)\text{-}74}$ 403-74

ПРЕДИСЛОВИЕ

Значительное повышение интереса к проблемам гравитации в последние годы является одной из наиболее характерных черт современной физики. Оно вызвано прежде всего стремлением более глубоко проанализировать общую теорию относительности (ОТО), или теорию тяготения Эйнштейна, являющуюся общепризнанным базисом понимания структуры пространства-времени.

Вместе с тем грандиозная физическая картина мира, связанная с ОТО, покоится на далеко недостаточных экспериментальных подтверждениях, допускающих наряду с ОТО и другие варианты, типа скалярно-тензорной теории или пространства, наделенного кручением. Кроме того, в самих основах ОТО имеются известные трудности, связанные с невозможностью удовлетворительного определения энергии и углового момента гравитационного поля. Далеко не уточнены также понятия систем отсчета инерциальных и неинерциальных.

Некоторым из отмеченных проблем и посвящена предлагаемая вниманию читателей монография известного советского гравитациониста профессора В. И. Родичева. Автор кладет в основу всего построения теории гравитации не компоненты метрики, как в большинстве курсов, а более основные величины — тетрады (образно говоря, «корни квадратные» из метрических коэффициентов).

Ряд обстоятельств подсказывает не только техническую целесообразность, но даже необходимость применения тетрад в ОТО, требуемых, например, при записи спинорного дираковского уравнения в римановой геометрии (Фок — Иваненко). Тетрады оказались полезными при анализе трудной проблемы энергии, как это было показано в работах Меллера, самого автора книги В. И. Родичева, И. М. Дозморова и его сотрудников, а также Б. Н. Фролова. Тетрады оказываются совершенно необходимыми для уточнения понятия системы отсчета, как подчеркивали советские авторы В. И. Родичев, О. С. Иваницкая, А. Е. Левашов, а также недавно Г. Ю. Тредер (ГДР), посвятивший тетрадной трактовке ОТО целую книгу, по умонастроению в ряде пунктов близкую к монографии В. И. Родичева. Изложению римановой геометрии в ортогональном репере, т. е. в тетрадах, была посвящена также монография знаменитого французского математика Кар-

тана. В близких направлениях двигаются также исследования группы грузинских гравитационистов, руководимой М. М. Мариашвили, подчеркивающих неголономный характер ряда соотношений, кратко рассматриваемых также и в данной книге.

Со своей стороны мы также всегда считали применение тетрад в качестве своеобразных потенциалов гравитационного поля необходимым и постоянно ратуем за широкую «тетрадную ревизию» всей теории гравитации и общей теории относительности.

В монографии В. И. Родичева, предполагающей знание основ стандартной ОТО, сначала дается ясное изложение метрической и тетрадной трактовки геометрии пространства-времени, а затем — тетрадная трактовка ОТО и проблемы энергии. Со свойственной автору известной в научных кругах отчетливостью анализируется решение Шварцшильда в тетрадах. Применяется удачное дополнительное условие на тетрады, предложенное самим В. И. Родичевым, постоянно приводятся аналогии с электродинамикой. Установленный с помощью тетрад наиболее правдоподобный комплекс энергии применяется для трактовки вопроса об энергии, переносимой гравитационными волнами. Кроме того, целая глава посвящена трактовке систем отсчета инерциальных и неинерциальных. Как автор неоднократно подчеркивает в книге и ее заключении, вопрос относительно общей ковариантности и перехода к неинерциальным системам отсчета во многом проясняется с помощью тетрад, но до конца еще не решается.

Несомненно, книга В. И. Родичева достойна будет занять видное место в современной литературе по гравитации, являясь ценным вкладом в упомянутые проблемы. Монография выгодно отличается от многих курсов и книг по ОТО, уклоняющихся обычно от анализа указанных коренных проблем.

В заключение мы позволим себе обратить внимание читателей на ряд наших собственных новых результатов в близких областях в статьях, являющихся вступлением и дополнением в книге Г. Ю. Тредера и сборнику «Квантовая гравитация и топология», где также дается сжатое изложение всей вообще основной ситуации в теории гравитации и ОТО и ее обобщений в настоящее время.

Д. Д. Иваненко

ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития теории тяготения характеризуется не только поисками новых общерелятивистских эффектов, постановкой новых экспериментов, но также усиленным анализом ее трудностей, среди которых известная проблема энергии, импульса и момента гравитационного поля занимает одно из центральных мест.

Эйнштейн еще во время разработки теории считал, что «исключительное положение энергии гравитационного поля по сравнению со всеми другими видами энергии привело бы к недопустимым последствиям» [1], но успехи теории в предсказании и объяснении общерелятивистских эффектов отодвинули эту проблему на второй план. Тем не менее попытки решения ее никогда не прекращались.

Трудности, связанные с нетензорным характером величин, описывающих энергию, импульс и момент гравитационного поля, оказались настолько серьезными и неприступными, что их постепенно начали рассматривать как проявление особых свойств гравитационного поля — универсальности, неэкранируемости, нелокализуемости и т. д. Однако детальный анализ таких фундаментальных понятий, как системы отсчета и системы координат, показывает, что никакими особыми свойствами гравитационного поля невозможно объяснить так называемую «нелокализуемость» его — понятие, отражающее скорее наше бессилие в данном вопросе, чем существо дела.

Описание теории тяготения с помощью формализма ортогональных реперов (тетрад) позволяет представить все результаты, а не только уравнения Эйнштейна, в форме, ковариантной относительно произвольных преобразований координат. Все трудности при этом переносятся из точечного многообразия в другое — многообразие ортогональных реперов, где обнаруживаются такие стороны теории, которые остаются скрытыми в обычной метрической ее формулировке. В этом случае все геометрические объекты оказываются отнесенными в каждой мировой точке к локальному ортогональному реперу, т. е. к локальной лоренцевой системе, а это позволяет установить возможный физический смысл или от-

сутствие его в рассматриваемых геометрических объектах. Таким образом можно установить простые выражения для комплексов энергии, импульса и момента количества движения гравитационного поля, которые оказываются тензорами относительно произвольных преобразований координат. Применяя эти комплексы к анализу точных решений уравнений Эйнштейна, удается рассмотреть вопрос о переносе энергии гравитационными волнами.

К сожалению, все результаты тетрадной формулировки теории, кроме функции Лагранжа и уравнений Эйнштейна, снова оказываются нековариантными, но теперь уже относительно локальных лоренцевых вращений. Допустимыми являются преобразования Лоренца только с постоянными коэффициентами. Эту нековариантность частично удается понять — в некоторых случаях она связана с переходом к новой неинерциальной системе отсчета, т. е. с введением нового силового поля и, следовательно, с переходом к новым физическим условиям. В целом же формализм ортогональных реперов, конечно, не решает еще проблемы, но становится более ясным тот путь, следуя которому можно приблизиться к ее решению.

Таким образом, встает вопрос — в чем причина появления нековариантных результатов в теории, одним из принципов которой является принцип общей ковариантности. Решение этой задачи позволило бы не только соединить разумным образом общую теорию относительности с другими физическими теориями, например с квантовой теорией поля, но и глубже проникнуть в смысл самих уравнений Эйнштейна, понимание которых до сих пор остается далеко не полным.

При анализе трудностей общей теории относительности нам придется столкнуться с вопросом о геометрическом и физическом смысле координат, реперов и их преобразований, а для этого необходимо будет обратиться к исходным положениям геометрии, которые в монографиях по общей теории относительности не рассматривались в должном аспекте. Поэтому в первой главе кратко рассматриваются этапы построения геометрии, уясняется роль координат и реперов в этом построении, а также прослеживается возникновение понятия пространства в геометрическом смысле слова. Все выкладки, связанные с римановой геометрией и хорошо известные из учебной литературы, опускаются и приводятся лишь необходимые конечные результаты. Формализм ортогональных реперов изложен более подробно в виде, специально приспособленном для тетрадной формулировки теории тяготения. Во второй главе рассматриваются метрическая и тетрадная формулировки теории тяготения; третья глава посвящена анализу трудностей теории тяготения.

Последняя глава книги, посвященная геометрическому описанию систем отсчета, в некоторых своих пунктах является спорной. Автор надеется, что в ходе будущих дискуссий удастся достичь правильного решения этих сложных вопросов.

Для описания теории тяготения с помощью формализма ортогональных реперов и геометрического представления систем отсчета в книге применяются следующие основные условные обозначения:

СТО — специальная теория относительности
ОТО — общая теория относительности
ИСО — инерциальная система отсчета
НСО — неинерциальная система отсчета
$\mathbf{*e}_\mu$ — векторы координатного аффинного репера, задающего аффинную координатную систему
$\mathbf{e}_a$ — векторы глобального лоренцевого (ортонормированного) репера, задающего лоренцеву систему координат
X^a — лоренцевы (глобальные) координаты
X^μ — аффинные координаты
x^μ — криволинейные голономные координаты
dx^a — дифференциалы неголономных ортогональных координат
$\mathbf{e}_\mu$ — векторы локального аффинного координатного репера
$\mathbf{h}_a$ — векторы координатной тетрады
$\mathbf{n}_{(\alpha)}$ — векторы инвариантной тетрады, $(\alpha)=0, 1, 2, 3$

Глава I

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ И ФОРМАЛИЗМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЕПЕРОВ

Изложение вопроса мы начнем с рассмотрения исходных положений геометрии аффинного и эвклидова (псевдоэвклидова) пространств, а затем перейдем к многообразиям более общего вида.

1. Аффинное и эвклидово пространства

Первоначальными понятиями, на которых строится аксиоматика аффинного пространства, являются точка и вектор [2]. Если предположить еще, что теория чисел уже построена, то десять простых аксиом, определяющих аффинное пространство, сводятся, в сущности, к оправданию хорошо известных операций (не требующих метрики) между векторами и между числами и векторами. Перечислим эти аксиомы.

1. Существует по меньшей мере одна точка.

2. Каждой паре точек A и B, заданных в определенном порядке, поставлен в соответствие один и только один вектор $\overrightarrow{AB} \equiv \mathbf{a}$.

3. Для каждой точки A и каждого вектора $\mathbf{a}$ существует одна и только одна точка B, такая, что $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$.

4. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (аксиома параллелограмма).

5. Каждому вектору $\mathbf{a}$ и каждому числу α поставлен в соответствие определенный вектор $\alpha\mathbf{a}$.

6. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$, т. е. произведениями векторов на числа можно получить все векторы.

7. Имеет место дистрибутивный закон для умножения вектора на сумму чисел: $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.

8. Имеет место дистрибутивный закон для умножения числа на сумму векторов: $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$.

9. Последовательное умножение вектора на числа β и α сводится к его умножению на их произведение $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$.

10. Существует n линейно-независимых векторов, но любые $n+1$ векторов линейно-зависимы (аксиома размерности).

Первые четыре аксиомы устанавливают равенство векторов, позволяют определить сложение и вычитание их, аксиомы 5—9 определяют операции между векторами и числами. Наконец, десятая аксиома позволяет заданный вектор разложить по n линейно-независимым векторам.

Отметим, что в аффинном, а также и в эвклидовом пространствах, согласно аксиомам (2) и (3), вектор выступает не в виде направленного отрезка, а в виде параллельного сдвига, которому подвергаются все точки пространства. Однако не следует думать, что из аксиомы (2), в связи с предыдущим, вытекает несамостоятельный, подчиненный характер вектора, поскольку он однозначно задается двумя точками. Это говорит лишь о том, что между двумя множествами (многообразиями)—точечным и векторным —в аффинном и эвклидовом пространствах существует однозначная связь. В других более общих точечных многообразиях даже самого понятия вектора или направления не существует. Например, на искривленной двумерной поверхности (точечное многообразие) нельзя построить вектор («кривых» векторов не существует), однако с каждой точкой поверхности можно связать сколько угодно векторов, но все они будут лежать в касательной плоскости — в двумерном аффинном пространстве.

Из всех построений аффинного, а затем эвклидова (также псевдоэвклидова) пространства мы рассмотрим только реперы и связанные с ними координатные системы.

Свое рассмотрение начнем с того, что дадим общее определение репера.

Если совокупность геометрических фигур обладает тем свойством, что любая фигура может быть переведена в любую другую этой же совокупности одним и только одним автоморфизмом [1], и наоборот, любой автоморфизм переводит каждую фигуру в некоторую другую этой же совокупности, то эти фигуры называются реперами данного пространства [2]. Так определяются реперы любого однородного пространства. Из определения реперов не вытекает их конкретный вид, этим мы можем воспользоваться и выбрать их в виде, отвечающем нашей задаче.

Мы определим аффинный репер как совокупность n занумерованных линейно-независимых векторов (которые существуют согласно аксиоме размерности) и точки 0, служащей началом репера,

$$\{O,\ {}^*\mathbf{e}_\mu\}, \qquad \mu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n. \tag{1.1}$$

Тогда любой вектор можно разложить по векторам аффинного репера

$$\mathbf{A} = A^\mu\, {}^*\mathbf{e}_\mu, \tag{1.2}$$

где A^μ — аффинные компоненты вектора.

Перенося начало репера в любую точку пространства, мы построим множество таких реперов, образующих однородное поле. Выбирая начало O какого-либо репера за начало координат, каж-

---

[1] Автоморфизм — аффинное преобразование аффинного пространства в себя или отображение эвклидова пространства на себя. В последнем случае это называется движением в эвклидовом или псевдоэвклидовом пространстве.

дой точке M можно сопоставить тогда радиус-вектор $\mathbf{r}=\overrightarrow{OM}$. Разлагая его по векторам репера

$$\mathbf{r} = X^{\mu}\, {}^*\mathbf{e}_{\mu}, \tag{1.3}$$

мы получаем компоненты X^{μ} радиуса-вектора, которые одновременно являются аффинными координатами точки M. Совокупность координат всех точек образует координатную систему (сетку) — собственную систему, соответствующую данному полю реперов. Такие реперы, с которыми всегда связана координатная сетка, в дальнейшем будем называть координатными.

Пусть нам задан новый репер $\{O, {}^*\mathbf{e}_{\mu'}\}$, тогда инвариантный вектор (1.3), который задан, разумеется, независимо от какого-либо репера, можно разложить также по векторам нового репера, т. е.

$$\mathbf{r} = X^{\mu'}\, {}^*\mathbf{e}_{\mu'}. \tag{1.3a}$$

Выясним теперь, как связаны между собой реперы $\{O^*, \mathbf{e}_{\mu}\}$ и $\{O^*, \mathbf{e}_{\mu'}\}$ и компоненты X^{μ} и $X^{\mu'}$ инвариантного вектора $\mathbf{r}$.

Разлагая векторы нового репера по векторам старого и наоборот, получаем

$$\begin{gathered} {}^*\mathbf{e}_{\mu'} = \omega^{\mu}_{\mu'\cdot}\, {}^*\mathbf{e}_{\mu}, \qquad {}^*\mathbf{e}_{\mu} = \omega^{\mu'}_{\cdot\mu}\, {}^*\mathbf{e}_{\mu'}, \qquad \omega^{\cdot\sigma}_{\mu'}\omega^{\lambda'}_{\cdot\sigma} = \delta^{\lambda'}_{\mu'}, \\ \omega^{\cdot\lambda}_{\sigma'}\omega^{\sigma'}_{\cdot\mu} = \delta^{\lambda}_{\mu}, \qquad \operatorname{Det}|\omega^{\cdot\mu}_{\mu'}| \neq 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

— законы прямого и обратного преобразования реперов. Подставляя разложение вектора ${}^*\mathbf{e}_{\mu}$ из (1.4) в (1.3) и сравнивая это с (1. 3а), находим закон преобразования компонент вектора, а следовательно, и координат любой точки аффинного пространства

$$X^{\mu'} = \omega^{\mu'}_{\cdot\mu} X^{\mu}. \tag{1.4a}$$

Отметим, что из (1.3) и (1. 3а) видно следующее важное обстоятельство: номер вектора координатного репера всегда совпадает с номером той координатной линии, вдоль которой он располагается. Поэтому можно считать, что (1. 4) есть следствие (1. 4а), т. е. преобразование координат влечет за собой преобразование соответствующих координатных реперов.

В результате преобразований (1. 4) мы получили новое однородное поле координатных реперов $\{O, {}^*\mathbf{e}_{\mu'}\}$, с которым, очевидно, связана новая собственная координатная сетка $X^{\mu'}$; если еще произвести сдвиг начала отсчета на вектор $\overrightarrow{OO'}=\mathbf{r}_0$, то соответствующее аффинное преобразование координат и компонент вектора запишется

$$X^{\mu'} = \omega^{\mu'}_{\cdot\mu} X^{\mu} + X^{\mu'}_0, \qquad A^{\mu'} = \omega^{\mu'}_{\cdot\mu} A^{\mu}. \tag{1.5}$$

Отметим, что преобразование реперов (1. 4) и координатной системы (сетки) (1.5), вообще говоря, независимы и имеют, как мы увидим, существенно различную природу. Координатная сетка, например, может быть подвергнута произвольным (нели-

нейным) преобразованиям, в то время как поле реперов может остаться неизменным. Преобразования эти действуют в различных многообразиях: преобразование (1. 4) — в многообразии аффинных реперов, преобразование (1.5) — в точечном многообразии, т. е. в аффинном пространстве. В частных случаях, например в случае координатных реперов, коэффициенты преобразования в (1. 4) и (1. 5) могут совпадать и вслед за преобразованием координат, как мы знаем, происходит преобразование координатных реперов.

Приведенные в начале раздела десять аксиом, определяющих свойства аффинного пространства, не дают возможности вычислить ни длину вектора, ни скалярное произведение векторов, так как такие понятия не предусмотрены этими аксиомами. Выясним теперь, какими положениями следует дополнить эти аксиомы, чтобы они позволили вычислять и длину, и скалярное произведение.

Пусть в аффинном пространстве заданы два вектора **A** и **B**. Обозначим операцию скалярного произведения двух векторов как $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ — именно *обозначим*, а не определим. А теперь определим основные свойства этой операции:

$$1)\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A},$$

$$2)\ \mathbf{A}\cdot(\alpha\mathbf{B}_1+\beta\mathbf{B}_2)=\alpha\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_1+\beta\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_2,$$

где α, β — постоянные числа, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ — произвольные векторы.

Разложим векторы **A** и **B** по векторам координатного аффинного репера

$$\mathbf{A}=A^{\mu}\,{}^*\mathbf{e}_{\mu},\qquad \mathbf{B}=B^{\nu}\,{}^*\mathbf{e}_{\nu}$$

и составим из них скалярное произведение, использовав второе свойство. Так как компоненты A^{μ} и B^{ν} есть числа, получим

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}={}^*\mathbf{e}_{\mu}\cdot{}^*\mathbf{e}_{\nu}A^{\mu}B^{\nu}.$$

Таким образом, мы выразили скалярное произведение двух произвольных векторов через скалярные произведения векторов координатного аффинного репера. Дальнейшие вычисления будут возможны только в том случае, если мы определим смысл скалярных произведений ${}^*\mathbf{e}_{\mu}\cdot{}^*\mathbf{e}_{\nu}$.

В заданной системе координат и, следовательно, в заданном координатном аффинном репере определим

$${}^*\mathbf{e}_{\mu}\cdot{}^*\mathbf{e}_{\nu}=g_{\mu\nu}, \tag{1.6}$$

где $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$ — набор чисел, таких, что $\mathrm{Det}\,|g_{\mu\nu}|\neq 0$. Из (1.4) следует, что компоненты $g_{\mu\nu}$ образуют симметричный тензор второго ранга, который называется метрическим. Подчеркнем, что (1.6) нельзя рассматривать как результат вычисления, левую часть вычислить нельзя, ее значение в виде чисел $g_{\mu\nu}$ можно только задавать. Выражение (1.6) представляет собой самостоятельную

аксиому. После этого аффинное пространство превращается в эвклидово (или псевдоэвклидово). Теперь скалярное произведение двух векторов и квадрат длины дуги запишутся

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu}, \qquad ds^2 = g_{\mu\nu} dX^{\mu} dX^{\nu}. \tag{1.6а}$$

Если метрический тензор задан в одной системе координат, то в любой другой, согласно (1.4), он найдется преобразованием

$$g_{\mu'\nu'} = g_{\mu\nu} \omega^{\cdot\mu}_{\mu'} \omega^{\cdot\nu}_{\nu'}. \tag{1.6б}$$

Компоненты контравариантного метрического тензора $g^{\mu\nu}$ определим скалярными произведениями векторов взаимного репера $\{O, {}^*\mathbf{e}^{\mu}\}$, т. е. такого, что

$${}^*\mathbf{e}_{\mu} \cdot {}^*\mathbf{e}^{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}, \tag{1.7}$$

тогда получим

$$g^{\mu\nu} = {}^*\mathbf{e}^{\mu} \cdot {}^*\mathbf{e}^{\nu}, \qquad g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta^{\nu}_{\mu}. \tag{1.8}$$

После этого, очевидно, устанавливается связь между ко- и контравариантными компонентами тензоров

$$A_{\mu} = g_{\mu\lambda} A^{\lambda}, \qquad A^{\lambda} = g^{\mu\lambda} A_{\mu}. \tag{1.9}$$

В эвклидовом (или псевдоэвклидовом) пространстве среди аффинных реперов можно выделить особый класс ортонормированных реперов — тетрад (в случае четырех измерений)

$$\{O, \mathbf{e}_a\}, \qquad \{O, \mathbf{e}^a\}, \qquad a = 0, 1, 2, 3. \tag{1.10}$$

В отличие от аффинных векторы ортонормированных реперов будем отмечать латинскими индексами a, b, c,. . . без звездочек. При этом вектор $\mathbf{e}_{(0)}$ — временноподобный, остальные $\mathbf{e}_{(k)}$, образующие декартову триаду, — пространственноподобны. Как и в случае аффинного пространства, здесь можно построить однородное поле тетрад, образующее «кубическую» решетку, причем тетрады (1.10) будут отличаться только параллельными сдвигами. Если мы свяжем с этим полем собственную ортогональную систему координат, то это и будет галилеева система координат, а тетрады (1.10) превратятся при этом в координатные. Тогда компоненты метрического тензора будут представлены таким образом:

$$\eta_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b, \qquad \eta^{ab} = \mathbf{e}^a \cdot \mathbf{e}^b, \qquad \eta_{ab} = \eta^{ab} = \mathrm{diag}\,\{+1, -1, -1, -1\},$$
$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}^b = \delta^b_a, \qquad \eta_{ac}\eta^{bc} = \delta^b_a. \tag{1.11}$$

Любой вектор мы можем разложить по векторам ортонормированного репера аналогично (1.2)

$$\mathbf{A} = A^a \mathbf{e}_a = A_a \mathbf{e}^a, \tag{1.12}$$

где A_a, A^a — ортогональные компоненты вектора. Квадрат длины вектора запишется

$$A^2 = \eta_{ab} A^a A^b = \eta^{ab} A_a A_b = A_a A^a. \tag{1.13}$$

Наконец, связь между ко- и контравариантными компонентами вектора вследствие (1.9) и (1.11) будет иметь здесь следующий вид:

$$A_{(0)} = A^{(0)}, \qquad A_{(k)} = -A^{(k)}. \tag{1.14}$$

Подвергая ортореперы ортогональному преобразованию с постоянными коэффициентами ($\omega_{a'}{}^{a}_{\cdot}=\mathrm{const}$)

$$\mathbf{e}_{a'} = \omega^{a}_{a'\cdot}\,\mathbf{e}_{a}, \qquad \eta_{a'b'} = \omega^{a}_{a'\cdot}\,\omega^{b}_{b'\cdot}\,\eta_{ab}, \qquad \mathrm{Det}\,|\,\omega^{a}_{a'\cdot}\,| = 1, \tag{1.15}$$

мы получим новое однородное поле координатных тетрад, которому соответствует новая галилеева система координат, связанная с первоначальной линейным ортогональным преобразованием с теми же коэффициентами $\omega^{a}_{a'}$:

$$X^{a'} = \omega^{a'}_{\cdot a} X^{a} + X^{a'}_{0}, \tag{1.16}$$

где $X^{a'}_{0}$ — компоненты вектора $\mathbf{r}_0$ (сдвига начала отсчета).

Как и в аффинном пространстве, преобразования (1. 15) и (1.16), вообще говоря, независимы, хотя в частном случае координатных тетрад могут иметь одинаковые коэффициенты.

После этого краткого вступления перейдем к рассмотрению более общих положений, лежащих в основе геометрии, причем по возможности будем стараться дать физические основания для такого рассмотрения. С них мы даже и начнем.

2. Элементарное многообразие и системы координат

При изучении физических явлений, выполняя измерения, физик всякий раз сталкивается с физическими величинами — энергией, моментом, напряженностью силового поля и т. д. — и различного вида множествами, элементы которых, в зависимости от характера эксперимента, интерпретируются по-разному. Это могут быть события в физическом пространстве-времени, состояния динамической системы, точки на поверхности тела, спектральные линии и т. д.

Каждый элемент такого множества характеризуется набором чисел, полученных, вообще говоря, в результате измерений и вычислений. Количество чисел в наборе (размерность) зависит от природы элемента. Так, например, состояние изолированной механической системы определяется, как известно, интегралами движения, которым соответствует десять чисел. Спектральная линия определяется двумя числами — частотой и интенсивностью. Наконец, наиболее интересный для нас случай — точечное событие в физическом пространстве-времени — характеризуется четырьмя числами.

Полученную информацию о физических величинах и множествах физик будет пытаться анализировать. Он будет искать и устанавливать связи между физическими величинами и множествами. Однако выполнить это возможно достаточно строго только в том случае, если удастся полученную информацию перевести на язык

математики. Иначе говоря, необходимо прежде всего найти отображение изучаемых физических величин и множеств на некоторую математическую схему.

Проследим, как это делается. Прежде всего для описания множества необходимо научиться отличать один элемент его от другого, а затем установить связь (если она подсказывается опытом) элементов множества с физическими величинами. Например, научившись различать точки физического пространства и моменты времени, мы можем связать с ними численное значение напряженности силового поля и тем самым описать распределение его в пространстве и изменение со временем.

Предположим, что набор чисел однозначно характеризует элемент множества. Тогда мы можем использовать эти наборы для перечисления, т. е. для распознавания элементов множества.

Примером дискретной нумерации служит перечисление (классификация) квантовых состояний системы с помощью квантовых чисел. Перечисление точек на поверхности или событий в физическом пространстве-времени представляют примеры непрерывной нумерации.

Осуществление подобной нумерации (перечисления) является первым шагом при изучении свойств множества. При этом основное и единственное требование, которое предъявляется к нумерации, — это, очевидно, требование взаимно однозначного соответствия набора чисел и элемента множества. Но тогда без ущерба для нумерации наборы чисел, задающие одну нумерацию, можно заменить любыми другими наборами, задающими другие нумерации, с единственным условием взаимно однозначного соответствия одних наборов чисел другим. Иначе говоря, перечисление элементов множества можно менять в широких пределах и это никак не отразится на свойствах множества или его отдельных элементов.

Описанную процедуру нумерации и все ее свойства можно геометризовать, воспользовавшись одним из исходных понятий геометрии — элементарным многообразием. Дадим его определение [2].

Рассмотрим некоторое множество, его элементы M могут иметь, как мы уже говорили, самую различную интерпретацию. Тогда элементарным многообразием n измерений и класса N называется любое множество, для которого задано взаимно однозначное отображение на область Ω изменения n переменных x^μ ($\mu=1,2,\ldots,n$) с точностью до произвольного N раз дифференцируемого преобразования. Запишем это так:

$$M \leftrightarrow \{x^\mu\} \in \Omega. \qquad (2.1)$$

В этом отображении элементы M называются точками, отображение (2.1) — координатной системой (или сеткой), значения переменных x^μ — координатами точки M. В определении многообразия сказано, что отображение задается с точностью до произ-

вольного дифференцируемого преобразования координат, т. е. мы можем координаты x^μ подвергнуть такому преобразованию:

$$x^{\mu'} = f^{\mu'}(x^\mu), \qquad x^\mu = \varphi^\mu(x^{\mu'}), \tag{2.2}$$

где $f^{\mu'}$ и φ^μ — произвольные N раз дифференцируемые функции. Мы получаем новое отображение

$$M \leftrightarrow \{x^{\mu'}\} \in \Omega'. \tag{2.3}$$

Многообразия, связанные преобразованиями (2.2), называются диффеоморфными.

Сравнивая это определение многообразия с тем, что говорилось выше о нумерации элементов множества, легко видеть, что координатная сетка есть геометрическое отображение нумерации элементов. Диффеоморфизм многообразий означает, что одно и то же множество элементов может быть занумеровано бесконечным количеством эквивалентных способов, которым в отображении будут соответствовать бесконечное количество координатных сеток, связанных преобразованиями (2.2).

Полученное многообразие еще нельзя назвать пространством. С геометрической точки зрения это нечто весьма неопределенное, аморфное. Правда, уже на этой стадии построения геометрии, когда в нашем распоряжении имеются точки и координатные системы, в многообразии можно задавать кривые, поверхности, тензоры с их обычным законом преобразования компонент, а также можно определить все операции с тензорами (сложение, умножение, свертывание), не требующие перехода к соседним точкам.

В многообразии пока нет связности, следовательно, нельзя сравнивать тензоры, заданные в различных точках многообразия, и поэтому невозможно определить ковариантную производную. Здесь еще нет метрики, следовательно, нельзя определить длину дуги кривой. Мы видим, что элементарное многообразие предшествует понятию пространства при построении геометрии.

Далее геометр поступает следующим образом: задает или объект связности, если хочет изучать пространство аффинной связности, или поле метрического тензора, если он думает заниматься римановой геометрией, или, наконец, независимо и то и другое. Задание этих величин превращает элементарное многообразие в пространство в геометрическом смысле этого слова. Частными случаями превращения точечного многообразия в пространство являются, очевидно, аффинное и эвклидово (псевдоэвклидово) пространства.

После этого геометр стремится получить как можно больше следствий из сделанных допущений. Физик, пытающийся разобраться в свойствах физического пространства-времени, отображая его на геометрическое пространство, не может поступать так свободно, как геометр. Каждое допущение, которое он кладет в основу, определяя свойства пространства, должно иметь опытное оправдание.

Точно так же, исходя только из геометрических соображений, априори невозможно решить, каким геометрическим объектом следует отобразить данную физическую величину. Хотя кое-что существенное об этом можно уже сейчас сказать, используя свойства многообразия и отображения нумерации множества абстрактных элементов M.

Пусть экспериментатор установил существование некоторого физического поля. Зная только факт его существования, что можно сказать о геометрическом объекте, который должен отображать это поле?

Существование поля — объективный физический факт, не зависящий от способа нумерации точек пространства и моментов времени; отсюда следует, что геометрический объект, описывающий физическое поле, должен быть тензором. Ранг тензора только из факта существования установить невозможно.

Тогда тензорные поля, задаваемые в многообразии, геометрически отображают, очевидно, связь физических величин и множества элементов M, о которой мы говорили в начале раздела.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых важных свойств многообразия.

Если система координат, заданная на многообразии, подвергается преобразованию (2.2), то компоненты тензора первого ранга A_μ или A^μ, как известно, преобразуются по закону

$$A_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} A_\mu, \qquad A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} A^\mu. \tag{2.4}$$

Сравнивая это с (1.4), находим

$$\omega^{\mu}_{\mu'\cdot} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}, \qquad \omega^{\mu'}_{\cdot\mu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}, \tag{2.5}$$

но теперь уже тензоры A_μ и A^μ нельзя интерпретировать как векторы, так как в точечном многообразии, вообще говоря, нет векторов. Однако частично утраченную возможность векторной интерпретации мы все же можем восстановить. Для этого в каждой точке M многообразия можно построить свое аффинное пространство, имеющее с многообразием одну общую точку O, совпадающую, в частности, с точкой M. Затем тензоры A^μ в точке M, с сохранением всех линейных зависимостей между ними, можно отобразить на векторы $\mathbf{A}$ этого локального аффинного пространства. Такое аффинное пространство называется касательным, а его векторы $\mathbf{A}$ — касательными векторами. Напомним, как это делается [2].

Выберем в точке M многообразия n линейно-независимых тензоров $a^\mu_{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n$, тогда любой тензор A^μ может быть разложен по тензорам $a^\mu_{(\lambda)}$

$$A^\mu = k^{(\lambda)} a^\mu_{(\lambda)}, \qquad \mathrm{Det}\,|\, x^\mu_{(\lambda)} \,| \neq 0, \tag{2.6}$$

где коэффициенты разложения $k^{(\lambda)}$ найдутся из записанной системы уравнений. Далее, в локальном аффинном пространстве в точке O выберем n линейно-независимых векторов $\mathbf{e}_\lambda$ и каждому тензору A^μ сопоставим вектор $\mathbf{A}$ в виде разложения его с теми же коэффициентами, что и в (2.6),

$$\mathbf{A} = k^{(\lambda)}\mathbf{e}_\lambda. \tag{2.7}$$

Такое сопоставление действительно отображает линейные зависимости между тензорами в многообразии на линейные зависимости между векторами в касательном аффинном пространстве[1]. Например, пусть в точке M многообразия заданы разложения (2. 6) двух тензоров A^μ и B^μ

$$A^\mu = k^{(\lambda)}a^\mu_{(\lambda)}, \qquad B^\mu = m^{(\lambda)}a^\mu_{(\lambda)}, \tag{2.8}$$

их линейная форма будет иметь, очевидно, следующее разложение:

$$\alpha A^\mu + \beta B^\mu = \{\alpha k^{(\lambda)} + \beta m^{(\lambda)}\}\, a^\mu_{(\lambda)}. \tag{2.9}$$

Тогда в касательном аффинном пространстве это отобразится, согласно (2. 7), в линейную векторную форму

$$\{\alpha k^{(\lambda)} + \beta m^{(\lambda)}\}\, \mathbf{e}_\lambda = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}. \tag{2.10}$$

Из выражений (2.6) и (2.7) видно, что коэффициенты разложения $k^{(\lambda)}$ — скалярные функции точки, а сами разложения — общековариантны, следовательно, и само отображение не зависит от выбора координатной сетки.

Легко видеть, что точка O и линейно-независимые векторы $\mathbf{e}_\lambda$, по которым происходят разложения (2.7) и (2.10), образуют локальный аффинный репер. Он лишь одной точкой O, своим началом, принадлежит точечному многообразию, а вся остальная его векторная конструкция располагается в касательном аффинном пространстве, точнее говоря, в центроаффинном пространстве, поскольку точка прикосновения является выделенной, так как именно в ней находятся начала всех реперов, которые могут быть построены в данном (локальном) касательном пространстве. Множество этих реперов связано локальными аффинными преобразованиями, коэффициенты $\omega^{\lambda'}_{\lambda}$ которых зависят от выбора точки. Из этой картины особенно ясно видно, что преобразование координат точечного многообразия никакого отношения к реперам не имеет, оно меняет только числа (координаты), отмечающие точку O — начало реперов.

Введем теперь специальный класс локальных реперов — так называемых координатных аффинных реперов, частный случай которых мы рассмотрели уже в первом параграфе. Для этого в за-

---

[1] Касательные пространства, принадлежащие разным точкам многообразия, пока не имеют между собой никакой связи, так как в многообразии еще не введен объект связности.

данной системе координат x^μ в некоторой точке O многообразия выберем n тензоров $a^\mu_{(\lambda)}$ со следующими компонентами:

$$a^\mu_{(\lambda)} = \delta^\mu_\lambda. \qquad (2.11)$$

При этом разложения (2. 6) и (2. 7) запишутся

$$A^\mu = k^{(\lambda)} a^\mu_{(\lambda)} = k^{(\mu)}, \qquad \mathbf{A} = k^{(\mu)}\mathbf{e}_\mu = A^\mu \mathbf{e}_\mu; \qquad (2.12)$$

следовательно, тензорам (2. 11) в касательном аффинном пространстве соответствуют векторы $\mathbf{e}_\mu$. В этом случае репер $\{O, \mathbf{e}_\mu\}$ называется координатным аффинным репером. Смысл названия «координатный» будет ясен, если мы найдем касательный вектор к какой-либо координатной линии, например к линии x^p. Рассматривая x^p как параметр $x^p = t$, в соответствии с процедурой (2. 12), находим

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^p} = \delta^\mu_p, \qquad \frac{\partial x^\mu}{\partial x^p}\mathbf{e}_\mu = \delta^\mu_p \mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_p, \qquad (2.13)$$

т. е. касательный вектор к координатной линии x^p совпадает с $\mathbf{e}_p$. Таким образом, векторы координатного репера являются касательными к координатным линиям той системы координат, которой он принадлежит, и, следовательно, номера векторов координатного репера совпадают с номерами соответствующих координатных линий. В силу такого определения координатный репер зависит от выбора системы координат, этим он отличается от любых других реперов, которые могут быть построены в той же точке многообразия. При переходе к другой системе координат координатный репер преобразуется по закону

$$\mathbf{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\mathbf{e}_\mu. \qquad (2.14)$$

Наглядный пример возникновения координатного репера мы получим, рассмотрев криволинейные координаты x^μ в аффинном пространстве. Радиус-вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ точки M (точка O — начало координат) будет теперь функцией криволинейных координат x^μ. Тогда, согласно (1. 3), имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^\lambda) = X^\sigma(x^\lambda)\,{}^*\mathbf{e}_\sigma. \qquad (2.15)$$

Легко видеть, что вектором, касательным к координатной линии x^μ, будет $\partial_\mu \mathbf{r}$. Эти векторы, как известно, линейно-независимы, а поэтому образуют локальный аффинный репер $\{O, \mathbf{e}_\mu\}$, где

$$\mathbf{e}_\mu = \partial_\mu \mathbf{r} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\mu} \qquad (2.16)$$

и есть координатный репер [1]. При переходе к новой системе координат $x^{\mu'}$ он преобразуется, очевидно, по закону (2. 14), в то время

---

[1] По терминологии Лихнеровича [21], такой репер называется естественным или натуральным.

как любой другой произвольный репер, не координатный $\{O, \mathbf{n}_{(\alpha)}\}$, не реагирует на преобразование координат.

Разумеется, компоненты $n^{\mu}_{(\alpha)}$ реперных векторов, отнесенных к координатному реперу

$$\mathbf{n}_{(\alpha)} = n^{\mu}_{(\alpha)} \mathbf{e}_{\mu}, \tag{2.17}$$

преобразуются, ввиду изменения последнего, по обычному тензорному закону

$$n^{\mu'}_{(\alpha)} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} n^{\mu}_{(\alpha)}, \tag{2.18}$$

но сам репер $\{O, \mathbf{n}_{(\alpha)}\}$ как некоторая векторная конструкция остается неизменным.

Примером поля инвариантных реперов может служить поле реперов Френе, связанных с какой-либо конгруэнцией кривых (в частности — мировых линий).

3. Пространство аффинной связности

В многообразии все операции с тензорами будут ковариантны в том случае, если они производятся над тензорами, взятыми в одной и той же точке. Сравнить, например, два тензора, принадлежащих разным точкам многообразия, без дополнительных соглашений невозможно.

Одним из таких соглашений является определение закона изменения компонент тензора при параллельном переносе [3], т. е. введение объекта связности

$$d_p A^{\mu} = -{}^*\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} A^{\lambda} dx^{\sigma}, \qquad d_p A_{\mu} = {}^*\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\sigma\mu} A_{\lambda} dx^{\sigma}. \tag{3.1}$$

После введения этого закона многообразие превращается в пространство аффинной связности. Если дополнительно потребовать неизменность инвариантного произведения тензоров при параллельном переносе

$$d_p (A^{\mu} B_{\mu}) = 0, \tag{3.2}$$

то

$${}^*\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} = {}^*\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda}, \tag{3.3}$$

т. е. изменение ко- и контравариантных компонент определяется одними и теми же коэффициентами аффинной связности. Закон преобразования этих коэффициентов мы получим, потребовав ковариантность закона перенесения (3. 1) относительно преобразований (2. 2), это дает

$${}^*\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} {}^*\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}}. \tag{3.4}$$

На коэффициенты связности, кроме дифференцируемости, заранее никаких ограничений не накладывается. Они, вообще го-

воря, несимметричны в нижних индексах, антисимметричная часть их называется кручением

$$^*C^{\lambda}_{\mu\nu.} = \frac{1}{2}\{^*\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - {}^*\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\} \equiv {}^*\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]}. \qquad (3.5)$$

Одна из возможных геометрических интерпретаций кручения состоит в следующем: пусть dx^{μ} и δx^{μ} — два различных вектора смещения, тогда параллельный перенос первого по второму дает

$$\delta_p(dx^{\mu}) = -{}^*\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} dx^{\lambda}\delta x^{\sigma},$$

перенос второго по первому —

$$d_p(\delta x^{\mu}) = -{}^*\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\delta x^{\lambda} dx^{\sigma},$$

зазор между концами перенесенных векторов запишется

$$d_p(\delta x^{\mu}) - \delta_p(dx^{\mu}) = -{}^*C^{\mu}_{\sigma\lambda.}(dx^{\sigma}\delta x^{\lambda} - dx^{\lambda}\delta x^{\sigma}),$$

т. е. эквивалентность обоих переносов будет только в случае симметричной связности; следовательно, кручение нарушает правило параллелограмма.

Из закона преобразования (3. 4) легко установить, что кручение является общековариантным тензором, в то время как сами коэффициенты связности, как видно из того же соотношения, образуют лишь аффинный тензор, т. е. тензор относительно линейных преобразований.

Мы еще не ввели метрику, следовательно, у нас нет понятия длины, однако геодезическая линия может быть определена уже на этом этапе, если мы воспользуемся свойством ее, согласно которому касательный вектор при параллельном переносе вдоль геодезической линии остается касательным к ней. Это дает $x^{\mu} = x^{\mu}(\tau)$,

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + {}^*\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}\frac{dx^{\lambda}}{d\tau} = 0, \qquad (3.6)$$

где τ — канонический параметр. Из (3. 6) видно, что геодезические линии определяются симметричной частью связности

$$^*\Gamma^{\mu}_{(\sigma\lambda)} \equiv \frac{1}{2}\{^*\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} + {}^*\Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}\},$$

которая также есть объект связности с тем же законом преобразования (3. 4).

Имея закон параллельного переноса тензора

$$d_pA^{\mu} = -{}^*\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}A^{\lambda}dx^{\sigma}, \qquad d_pA_{\mu} = {}^*\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}A_{\lambda}dx^{\sigma}, \qquad (3.7)$$

можно определить обычным путем ковариантный дифференциал и производные

$$DA^{\mu} = dA^{\mu} - d_pA^{\mu} = {}^*\nabla_{\sigma}A^{\mu}dx^{\sigma},$$

где

$$^*\nabla_{\sigma}A^{\mu} = \partial_{\sigma}A^{\mu} + {}^*\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}A^{\lambda} \qquad (3.8)$$

— ковариантная производная от A^μ. Аналогично находим производную от A_μ

$$^*\nabla_\sigma A_\mu = \partial_\sigma A_\mu - {}^*\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} A_\lambda. \tag{3. 9}$$

Если ковариантная производная вектора равна нулю вдоль некоторого направления, $u^\sigma \nabla_\sigma A^\mu = 0$, то вдоль него вектор A^μ переносится параллельно. Используя это и положив $u^\sigma = dx^\sigma/d\tau$, $u^\sigma = A^\sigma$, можно снова прийти к уравнению геодезической (3. 6).

Введем теперь независимо от связности метрический тензор $g_{\mu\nu}$, тогда получаем возможность установить связь между ко- и контравариантными компонентами тензоров, вычислить длину дуги

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3. 10}$$

и записать также квадрат длины вектора

$$A^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu. \tag{3. 11}$$

Так как $g_{\mu\nu}$ и ${}^*\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ введены совершенно независимо, то ковариантная производная от метрического тензора не будет, вообще говоря, обращаться в нуль

$$^*\nabla_\sigma g_{\mu\nu} \neq 0. \tag{3. 12}$$

Тогда, записав ее в развернутом виде

$$^*\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = \partial_\sigma g_{\mu\nu} - {}^*\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} g_{\lambda\nu} - {}^*\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} g_{\lambda\mu} \tag{3. 13}$$

и с помощью круговой замены индексов написав еще два таких равенства, решим полученную систему относительно ${}^*\Gamma_{\mu\nu,\sigma} = g_{\sigma\lambda} {}^*\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ и найдем

$$^*\Gamma_{\mu\nu,\sigma} = \Gamma_{\mu\nu,\sigma} - S_{\mu\nu,\sigma} + {}^*C_{\sigma\mu,\nu} + {}^*C_{\sigma\nu,\mu} + {}^*C_{\mu\nu,\sigma}, \tag{3. 14}$$

где

$$\Gamma_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2}\{\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\} \tag{3. 15}$$

— символы Кристоффеля первого рода, представляющие метрическую часть объекта связности. Далее, величина

$$S_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2}\{{}^*\nabla_\mu g_{\nu\sigma} + {}^*\nabla_\nu g_{\mu\sigma} - {}^*\nabla_\sigma g_{\mu\nu}\} \tag{3. 16}$$

— тензор сегментарной кривизны и, наконец,

$$^*C_{\mu\nu,\sigma} = g_{\lambda\sigma} {}^*C^\lambda_{\mu\nu}. \tag{3. 17}$$

— ковариантные компоненты тензора кручения.

Таким образом, выражение (3. 14) дает разложение произвольной связности на метрическую часть (3. 15), которая сама есть объект связности, — не тензор и неметрическую тензорную часть.

Рассмотрим частный случай связности (3. 14), при которой ковариантная производная от метрического тензора обращается в нуль, т. е.

$$^{*}\nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} = 0. \tag{3. 18}$$

Из (3. 16) находим, что и

$$S_{\mu\nu,\,\sigma} = 0, \tag{3. 19}$$

тогда объект связности принимает следующий вид:

$$^{*}\Gamma_{\mu\nu,\,\sigma} = \Gamma_{\mu\nu,\,\sigma} + Q_{\mu,\,\nu\sigma}, \tag{3. 20}$$

где

$$Q_{\mu,\,\nu\sigma} = -Q_{\mu,\,\sigma\nu} = {}^{*}C_{\sigma\nu,\,\mu} + {}^{*}C_{\sigma\mu,\,\nu} + {}^{*}C_{\mu\nu,\,\sigma}. \tag{3. 21}$$

Перенесение, задаваемое объектом связности (3. 20), называется метрическим. Вследствие (3. 18) подъем и опускание индексов становится коммутативным с ковариантным дифференцированием.

Рассмотрим любопытный частный случай связности (3. 20). Пользуясь тем, что метрический тензор $g_{\mu\nu}$ ограничен лишь условием (3.18), а в остальном совершенно произволен [1], положим

$$g_{\mu\nu} \to \eta_{ab} = \mathrm{diag}\,\{+1,\ -1,\ -1,\ -1\}. \tag{3. 22}$$

Следовательно, мы ввели псевдоэвклидову метрику и галилееву систему координат во всем пространстве, а не локально [2]. Тогда, очевидно,

$$\Gamma^{c}_{ab} = 0 \tag{3. 23}$$

и (3.20) принимает вид

$$^{*}\Gamma_{ab,\,c} = Q_{a,\,bc}. \tag{3. 24}$$

Конечно, в галилеевых системах координат связность (3. 24), собственно, уже перестает выполнять свою роль — компенсировать нетензорность обычной производной; последнее, очевидно, теперь и не требуется.

Рассмотрим уравнение геодезической (3. 6). В качестве канонического параметра выберем длину дуги. Тогда, вводя единичный вектор касательной $u^a = dx^a/ds$, уравнение (3. 6) с учетом (3. 24) можно представить в виде

$$\frac{du^a}{ds} + Q^{a}_{c,\,b\cdot} u^c u^b = 0. \tag{3. 25}$$

Введем следующий бивектор:

$$F_{ab} = -F_{ba} = u^c Q_{c,\,ab}, \tag{3. 26}$$

---

[1] В дальнейшем мы всегда предполагаем, что необходимые условия дифференцируемости выполнены.

[2] При этом условие (3. 18), очевидно, выполнено.

тогда получим

$$\frac{du^a}{ds} = F^a_{\cdot b} u^b \tag{3.27}$$

— уравнение, в точности описывающее то же, что и второй закон Ньютона в релятивистской форме в электродинамике (т. е. в СТО). Отсюда, конечно, не следует, что F_{ab} есть тензор напряженности электромагнитного поля, но можно сделать очень важный, на наш взгляд, вывод о том, что пробная частица в любом силовом поле должна двигаться по закону (3. 27).

В самом деле, под действием любого силового поля скорость пробной частицы u^a должна изменяться, но так как численное значение ее модуля $u_a u^a = +1$ должно оставаться неизменным, то скорости ничего другого не остается, как только изменять свое 4-направление. Это и описывает уравнение движения (3. 27).

Таким образом, компоненты $Q^a_{c,\,b\cdot}$, которые можно назвать коэффициентами вращения, а также и компоненты кручения $^*C_{ab,\,c}$ оказываются связанными с силовыми полями любой природы, ибо закон движения (3. 27) выражает общее свойство всех силовых полей — поворачивать вектор скорости u^a при смещении вдоль мировой линии пробной частицы. В этом и состоит возможная физическая интерпретация поля кручения, однако, не полная, ибо здесь, в сущности, интерпретируется однозначно лишь бивектор F_{ab}.

Перейдем к еще более частному случаю: потребуем, чтобы геодезическая линия была прямой, т. е. $du^a/ds=0$, тогда из (3. 25) имеем

$$Q_{c,\,ba} = -Q_{b,\,ca}. \tag{3.28}$$

Это вместе с (3. 21) приводит к полной антисимметрии (по всем трем значкам) тензора кручения. Обозначим его в этом случае иначе:

$$^*C_{ab,\,c} = \Phi_{abc}; \tag{3.29}$$

из (3. 21) тогда следует, что и

$$Q_{a,\,bc} = \Phi_{abc}. \tag{3.30}$$

Таким образом, поле Φ_{abc} отлично от нуля, однако пробная частица движется по прямой. Это можно понять, если предположить, что поле Φ_{abc} как-то связано с собственным полем частицы. Этому полю может быть дана и квантовомеханическая интерпретация [4]. В этом случае оно оказывается связанным со спином частицы, т. е. действительно отображает собственное свойство частицы.

Вернемся, однако, к рассмотрению закона параллельного переноса (3. 7) и запишем изменение компонент вектора при переносе его вдоль малого замкнутого контура. Так как в общем случае

$d_p A^\mu$ и $d_p A_\mu$ не являются полными дифференциалами, то результирующее изменение компонент отлично от нуля

$$\oint d_p A_\sigma = \frac{1}{2} \int {}^*R^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma\cdot} A_\varepsilon dS^{\mu\nu} \neq 0, \tag{3. 31}$$

т. е. после переноса вектора по замкнутому контуру он не вернется к исходному значению, направление его изменится. Здесь тензор

$${}^*R^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma\cdot} = \partial_\mu {}^*\Gamma^{\varepsilon}_{\nu\sigma} - \partial^*_\nu \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\sigma} + {}^*\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\lambda} {}^*\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - {}^*\Gamma^{\varepsilon}_{\nu\lambda} {}^*\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \tag{3. 32}$$

называется тензором кривизны пространства. Воспользовавшись (3. 20), мы можем разложить тензор кривизны на две общековариантные части — метрическую, определяемую только метрикой пространства, и неметрическую, зависящую от кручения,

$${}^*R^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma\cdot} = R^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma\cdot} + \tilde{R}^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma\cdot}, \tag{3. 33}$$

где

$$R^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma\cdot} = \partial_\mu \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \tag{3. 34}$$

— тензор Римана—Кристоффеля и

$$\tilde{R}^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma\cdot} = \nabla_\mu Q^{\varepsilon}_{\nu,\,\sigma\cdot} - \nabla_\nu Q^{\varepsilon}_{\mu,\,\sigma\cdot} + Q^{\varepsilon}_{\mu,\,\lambda\cdot} Q^{\lambda}_{\nu,\,\sigma\cdot} - Q^{\varepsilon}_{\nu,\,\lambda\cdot} Q^{\lambda}_{\mu,\,\sigma\cdot} \tag{3. 35}$$

— неметрическая часть тензора кривизны. Оператор ∇_μ обозначает ковариантную производную относительно символов Кристоффеля, т. е.

$$\nabla_\sigma A^\mu = \partial_\sigma A^\mu + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} A^\lambda, \qquad \nabla_\sigma A_\mu = \partial_\sigma A_\mu - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} A_\lambda. \tag{3. 36}$$

Тензор кривизны (3. 32) удовлетворяет следующим тождествам Бианки:

$$\begin{aligned} &{}^*\nabla_\sigma {}^*R^{\lambda}_{\mu\nu\varepsilon\cdot} + {}^*\nabla_\mu {}^*R^{\lambda}_{\nu\sigma\varepsilon\cdot} + {}^*\nabla_\nu {}^*R^{\lambda}_{\sigma\mu\varepsilon\cdot} = \\ &\qquad = 2\left\{ {}^*C^{\alpha}_{\sigma\mu\cdot} {}^*R^{\lambda}_{\nu\alpha\varepsilon\cdot} + {}^*C^{\alpha}_{\mu\nu\cdot} {}^*R^{\lambda}_{\sigma\alpha\varepsilon\cdot} + {}^*C^{\alpha}_{\nu\sigma\cdot} {}^*R^{\lambda}_{\mu\alpha\varepsilon\cdot} \right\}. \end{aligned} \tag{3. 37}$$

Свертывая (3. 33) по ε, ν, получим

$${}^*R_{\mu\sigma} = R_{\mu\sigma} + \tilde{R}_{\mu\sigma}, \tag{3. 38}$$

где $R_{\mu\sigma}$, зависящий только от метрики, называется тензором Риччи. Свертывая (3. 38) с метрическим тензором, находим скалярную кривизну пространства

$${}^*R = g^{\mu\sigma}\, {}^*R_{\mu\sigma} = R + \tilde{R}, \tag{3. 39}$$

где R — риманова скалярная кривизна пространства. Неметрическая часть скалярной кривизны имеет вид

$$\tilde{R} = 2\nabla_\sigma Q^{\sigma\varepsilon}_{\varepsilon,\,\cdot\cdot} + Q_{\sigma,\,\lambda\varepsilon} Q^{\varepsilon,\,\sigma\lambda} - Q^{\varepsilon}_{\varepsilon,\,\lambda\cdot} Q^{\sigma\lambda}_{\sigma,\,\cdot\cdot} \tag{3. 40}$$

Подставляя сюда значение $Q_{\mu,\,\nu\sigma}$ из (3. 21), находим

$$\tilde{R} = 4\nabla_\sigma {}^*C^{\varepsilon\sigma}_{\cdot\cdot,\,\varepsilon} + {}^*C_{\sigma\lambda,\,\varepsilon} Q^{\varepsilon,\,\sigma\lambda} + 4\, {}^*C^{\varepsilon\lambda}_{\cdot\cdot,\,\varepsilon} {}^*C^{\sigma}_{\cdot\lambda,\,\sigma\cdot}. \tag{3. 41}$$

В рассмотренных частных случаях, когда введена псевдоэвклидова метрика, тензор кривизны (3. 33), а также скалярная кривизна сводятся к своим неметрическим слагаемым

$$^*R^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma.} = \tilde{R}^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma.}, \qquad ^*R = \tilde{R}, \tag{3. 42}$$

при этом если кручение имеет вид (3. 29), т. е. полностью антисимметрично, из (3. 41) находим для $\tilde{R}$ особенно простое выражение

$$\tilde{R} = \Phi_{abc}\Phi^{abc}. \tag{3. 43}$$

Отметим, что коэффициенты связности (3. 20) могут быть получены путем добавления к коэффициентам $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ (риманова связность) тензора $Q^{\lambda}_{\mu,\nu}$.. Такое преобразование называется деформацией связности, а $Q^{\lambda}_{\mu,\nu}$ — тензором аффинной деформации. Легко видеть, что такие преобразования образуют группу, которая не нарушает ковариантности и инвариантности тензорных выражений.

Если тензор кривизны (3. 32) равен нулю и связность $^*\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ — без кручения, то пространство аффинной связности есть просто аффинное пространство, в котором введена криволинейная система координат. Тогда можно найти такие преобразования координат к некоторым новым, в которых все коэффициенты связности $^*\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ обратятся в нуль, — это, очевидно, будет аффинная координатная система.

4. Римановы пространства

Если в многообразии определено поле метрического тензора $g_{\mu\nu}$, т. е. в каждом центроаффинном касательном пространстве заданы скалярные произведения (1. 6) и, следовательно, определены квадраты длины дуги и вектора, то многообразие превращается в пространство Римана. Закон параллельного переноса в этом случае проще всего получить, положив в объекте связности (3. 20) кручение равным нулю, тогда

$$d_pA^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}A^{\lambda}dx^{\sigma}, \qquad d_pA_{\mu} = \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}A_{\lambda}dx^{\sigma}, \qquad \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}, \tag{4. 1}$$

где

$$\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} = g^{\mu\tau}\Gamma_{\sigma\lambda,\,\tau}, \qquad \Gamma_{\sigma\lambda,\,\tau} = \frac{1}{2}\{\partial_{\sigma}g_{\lambda\tau} + \partial_{\lambda}g_{\sigma\tau} - \partial_{\tau}g_{\sigma\lambda}\}. \tag{4. 2}$$

Из (3. 18) также следует, что

$$\nabla_{\sigma}g_{\mu\nu} = \nabla_{\sigma}g^{\mu\nu} = 0, \tag{4. 3}$$

здесь ∇_{σ} — означает риманову ковариантную производную, определенную согласно (3. 36). Соотношение (4. 3) показывает, что метрические тензоры являются ковариантно постоянными. Поэтому операция подъема и опускания индексов коммутативна с ковариантным дифференцированием. Рассмотрим некоторые важные случаи дифференцирования.

Используя симметрию связности, найдем ковариантный вихрь, или ротацию от вектора,

$$\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \tag{4.4}$$

он выражается через обычные производные (как и в галилеевой системе координат).

Далее, воспользовавшись вспомогательными соотношениями, которым удовлетворяют символы Кристоффеля (4. 2)

$$\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \sqrt{-g}, \qquad g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \{\sqrt{-g} g^{\lambda\sigma}\}, \tag{4.5}$$

найдем ковариантную расходимость вектора

$$\nabla_\sigma A^\sigma = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \{\sqrt{-g} A^\sigma\}; \tag{4.6}$$

как видим, она сводится к обычной дивергенции от векторной плотности. Для антисимметричного тензора $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$ расходимость имеет вид

$$\nabla_\sigma B^{\mu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \{\sqrt{-g} B^{\mu\sigma}\} \tag{4.7}$$

и также сводится к обычной дивергенции от тензорной плотности. Для симметричного тензора $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ расходимость можно представить следующим образом:

$$\nabla_\sigma T^\sigma_\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \{\sqrt{-g} T^\sigma_\mu\} - \frac{1}{2} \{\partial_\mu g_{\lambda\nu}\} T^{\lambda\nu}. \tag{4.8}$$

Наконец, ковариантный оператор Даламбера, взятый от скаляра, запишется

$$\Box \varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{\sqrt{-g}\, g^{\sigma\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\lambda}\right\}. \tag{4.9}$$

В римановом пространстве, с положительно определенной метрикой, геодезические линии определяются как линии минимального расстояния и находятся из вариационного принципа

$$\delta \int ds = 0, \qquad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{4.10}$$

Выполняя варьирование, получим

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0. \tag{4.11}$$

Если ds^2 не является положительно определенной, как это имеет место в ОТО, то геодезическая линия — экстремальная кривая. Отметим следующее свойство геодезических линий: вектор, переносимый вдоль нее, сохраняет угол наклона к ней; в частности, если вектор касателен к геодезической линии, то при параллельном переносе он будет оставаться касательным. Мы ви-

дим, что теми же свойствами обладают прямые линии в плоском пространстве.

Тензор кривизны риманова пространства сводится, очевидно, к тензору Римана—Кристоффеля (3. 34). Обращение его в нуль является необходимым и достаточным условием того, что плоское пространство — эвклидово или псевдоэвклидово. Тождества Бианки в римановом пространстве принимают следующий вид:

$$\nabla_\sigma R^{\lambda}_{\mu\nu\varepsilon\cdot} + \nabla_\mu R^{\lambda}_{\nu\sigma\varepsilon\cdot} + \nabla_\nu R^{\lambda}_{\sigma\mu\varepsilon\cdot} = 0; \tag{4. 12}$$

умножая это на $g^{\nu\tau}$ и свертывая индексы τ, ε и σ, λ, получим свернутые тождества Бианки

$$\nabla_\sigma G^{\sigma}_{\mu} = 0, \qquad G^{\sigma}_{\mu} = R^{\sigma}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\sigma}_{\mu} R, \tag{4. 13}$$

где G^{σ}_{μ} — консервативный тензор Эйнштейна.

5. Конформное соответствие римановых пространств

Пусть в общей координатной сетке x^μ заданы две различные метрики $g_{\mu\nu}$ и $\tilde{g}_{\mu\nu}$ и их собственные связности без кручения, тогда мы имеем

$$\begin{gathered}\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0, \quad \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{g}_{\mu\nu} = 0, \quad \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\mu\nu,\sigma}, \quad \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \tilde{g}^{\lambda\sigma}\tilde{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma}, \\ \Gamma_{\mu\sigma,\sigma} = \frac{1}{2}\{\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\}, \\ \tilde{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2}\{\partial_\mu \tilde{g}_{\nu\sigma} + \partial_\nu \tilde{g}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \tilde{g}_{\mu\nu}\}.\end{gathered} \tag{5. 1}$$

Вычислив производные $\nabla_\sigma \tilde{g}_{\mu\nu} \neq 0$, легко установить связь между $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$, которая принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + S^{\lambda}_{\mu\nu\cdot}, \\ S^{\lambda}_{\mu\nu\cdot} = \tilde{g}^{\lambda\sigma} S_{\mu\nu,\sigma}, \qquad S_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2}\{\nabla_\mu \tilde{g}_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \tilde{g}_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \tilde{g}_{\mu\nu}\};\end{gathered} \tag{5. 2}$$

очевидно, соотношения (5. 2) есть частный случай общего выражения (3. 14), когда $^*C_{\mu\nu,\sigma} = 0$ и сделано несущественное изменение обозначений.

Если две метрики связаны зависимостью

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\varphi} g_{\mu\nu}, \qquad \tilde{g}^{\mu\nu} = e^{-2\varphi} g^{\mu\nu}, \tag{5. 3}$$

где $\varphi(x)$ — скалярная функция точки, то это значит, что два римановых пространства приведены в конформное соответствие друг с другом.

Пользуясь выражениями (5. 2), легко найдем соотношение между связностями для случая (5. 3)

$$\begin{gathered}\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + (\varphi_\mu \delta^{\lambda}_{\nu} + \varphi_\nu \delta^{\lambda}_{\mu} - \varphi^{\lambda} g_{\mu\nu}), \\ \varphi_\mu \equiv \partial_\mu \varphi, \qquad \varphi^{\lambda} = g^{\lambda\sigma}\varphi_\sigma.\end{gathered} \tag{5. 4}$$

При конформном преобразовании метрики (5. 3) преобразуется также и тензор кривизны. Непосредственным вычислением находим

$$\tilde{R}^{\lambda}_{\mu\nu\sigma.} = R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma.} + S_{\mu\sigma}\delta^{\lambda}_{\nu} - S_{\nu\sigma}\delta^{\lambda}_{\mu} + g_{\mu\sigma}S^{\lambda}_{\nu} - g_{\sigma\nu}S^{\lambda}_{\mu},$$
$$S_{\mu\sigma} = \varphi_{\mu\sigma} - \varphi_{\mu}\varphi_{\sigma} + \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}\varphi_{\tau}\varphi^{\tau}, \quad \varphi_{\mu\sigma} = \nabla_{\mu}\varphi_{\sigma}, \quad S^{\lambda}_{\mu} = g^{\lambda\tau}S_{\mu\tau}. \tag{5.5}$$

Свертывая тензор кривизны по значкам (ν, λ), получим тензор Риччи

$$\tilde{R}_{\mu\sigma} = R_{\mu\sigma} + 2S_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}S, \qquad S = S^{\tau}_{\tau}. \tag{5.6}$$

Свертывая (5. 5) с $\tilde{g}^{\mu\sigma}$, найдем скалярную кривизну

$$\tilde{R} = e^{-2\varphi}(R + 6S). \tag{5.7}$$

Наконец, консервативный тензор Эйнштейна после конформного преобразования примет вид

$$\tilde{G}_{\mu\sigma} = G_{\mu\sigma} + 2(S_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}S). \tag{5.8}$$

Таким образом, при конформном преобразовании римановой метрики (5. 3) происходят следующие изменения:

1) элемент длины дуги

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = e^{2\varphi}ds^2, \quad d\tilde{s} = e^{\varphi}ds; \tag{5.9}$$

2) квадрат длины произвольного вектора

$$\tilde{A}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu} = e^{2\varphi}A^2, \quad A^2 = g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}; \tag{5.10}$$

3) компоненты единичного вектора касательной

$$\tilde{u}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tilde{s}} = e^{-\varphi}u^{\mu}, \quad u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds}, \quad \tilde{u}_{\mu} = e^{\varphi}u_{\mu}; \tag{5.11}$$

4) фундаментальный детерминант

$$\tilde{g} = \mathrm{Det}\,|\,\tilde{g}_{\mu\nu}| = e^{8\varphi}g, \quad g = \mathrm{Det}\,|\,g_{\mu\nu}|; \tag{5.12}$$

5) контравариантные компоненты метрического тензора

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = e^{-2\varphi}g^{\mu\nu}; \tag{5.13}$$

6) объект связности изменяется в соответствии с (5. 4);

7) тензоры кривизны Риччи, Эйнштейна и скалярная кривизна пространства изменяются в соответствии с (5. 5)—(5. 8);

8) коэффициенты Ламэ (см. ниже (6. 4)) изменяются по закону

$$\tilde{h}^{a}_{\mu} = e^{\varphi}h^{a}_{\mu}, \quad \tilde{h}^{\mu}_{a} = e^{-\varphi}h^{\mu}_{a}. \tag{5.14}$$

С другой стороны, при конформном преобразовании (5. 3) остаются неизменными следующие геометрические объекты и построения:

1) координатная система (сетка), ибо ее определение не связано с заданием метрики;

2) компоненты смещения dx^{μ} по той же причине;

3) квадрат длины единичного вектора касательной, согласно (5. 11),

$$\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{u}^{\mu}\tilde{u}^{\nu} = g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = 1; \tag{5. 15}$$

4) компоненты произвольного тензора, ибо они связаны непосредственно с координатной системой. Следствием неизменности компонент тензора мы имеем (5. 10);

5) угол между двумя векторами;

6) компоненты локальной галилеевой метрики вследствие (5. 3) и (5. 14)

$$\eta_{ab} = \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{h}^{\mu}_{a}\tilde{h}^{\nu}_{b} = g_{\mu\nu}h^{\mu}_{a}h^{\nu}_{b}. \tag{5. 16}$$

Разумеется, можно построить еще множество геометрических объектов, остающихся инвариантными или изменяющихся на скалярный множитель при конформном преобразовании.

Пусть метрика $g_{\mu\nu}$ такова, что преобразование (5.3) превращает ее в метрику плоского пространства (эвклидова или псевдоэвклидова), в котором введена криволинейная система координат. Такие пространства (метрики) называются конформно плоскими (например конформно эвклидовы). Строение тензора кривизны в этом случае мы найдем, положив в (5.5) $\tilde{R}^{\lambda}_{\mu\nu\sigma.} = 0$, другие тензоры получим, положив $\tilde{R}_{\mu\sigma} = \tilde{R} = 0$. Тогда

$$\begin{gathered} R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma.} = \delta^{\lambda}_{\mu}S_{\nu\sigma} - \delta^{\lambda}_{\nu}S_{\mu\sigma} + S^{\lambda}_{\mu}g_{\nu\sigma} - S^{\lambda}_{\nu}g_{\mu\sigma}, \\ R_{\mu\sigma} = -(2S_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}S), \qquad R = -6S. \end{gathered} \tag{5. 17}$$

Выражая из последних двух равенств $S_{\mu\sigma}$ через $R_{\mu\sigma}$ и R и подставляя в первое, находим

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma.} = -\frac{1}{2}\{\delta^{\lambda}_{\mu}R_{\nu\sigma} - \delta^{\lambda}_{\nu}R_{\mu\sigma} + R^{\lambda}_{\mu}g_{\nu\sigma} - R^{\lambda}_{\nu}g_{\mu\sigma}\} - \frac{R}{6}(g_{\mu\sigma}\delta^{\lambda}_{\nu} - g_{\nu\sigma}\delta^{\lambda}_{\mu}). \tag{5.18}$$

Такова конструкция тензора кривизны в случае конформно плоского пространства.

В произвольном римановом пространстве с тензором кривизны $R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma.}$ построим следующий тензор:

$$C^{\lambda}_{\mu\nu\sigma.} = R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma.} + \delta^{\lambda}_{[\mu}R_{\nu]\sigma} + \frac{1}{3}Rg_{\sigma[\mu}\delta^{\lambda}_{\nu]} + R^{\lambda}_{[\mu}g_{\nu]\sigma} \tag{5. 19}$$

который называется тензором конформной кривизны. Сравнивая (5. 19) и (5. 18), легко видеть, что если тензор конформной кривизны равен нулю, то пространство конформно плоское. Непосредственной проверкой можно убедиться, что тензор (5. 19) инвариантен относительно конформного преобразования метрики.

Как известно, пространство постоянной кривизны характеризуется следующими тензорами:

$$\begin{gathered} R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma.} = K(g_{\mu\sigma}\delta^{\lambda}_{\nu} - g_{\nu\sigma}\delta^{\lambda}_{\mu}), \qquad R_{\mu\sigma} = 3Kg_{\mu\sigma}, \\ R = 12K, \qquad K = \text{const}. \end{gathered} \tag{5. 20}$$

Подставляя это в (5.19), находим $C^{\lambda}_{\mu\nu\sigma\cdot}=0$, т. е. пространство постоянной кривизны — конформно плоское.

6. Ортогональные реперы — тетрады

Однородные поля аффинных и ортонормированных реперов, которые могут быть построены в аффинном, эвклидовом или псевдоэвклидовом пространстве (однородные пространства), представляют собой частные случаи неоднородных реперных полей. Последние, и только они, могут быть построены в многообразиях более общего вида, например в пространствах аффинной связности, в римановых пространствах.

Если в многообразии введена метрика, то это значит, как мы знаем, определены скалярные произведения векторов аффинного координатного репера

$$g_{\mu\nu}=\mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\nu},\qquad g^{\mu\nu}=\mathbf{e}^{\mu}\cdot\mathbf{e}^{\nu},\qquad \mathbf{e}^{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}\tag{6.1}$$

в каждом касательном центроаффинном пространстве. В отличие от аффинного пространства с его аффинной координатной системой, здесь компоненты метрического тензора есть функции точки, а сами реперы становятся локальными, т. е. изменяются при переходе от точки к точке.

Разумеется, метрический тензор можно ввести в многообразии непосредственно, не обращаясь к реперам, как это и было сделано ранее (см. разделы 3 и 4). Но наша цель как раз и состоит сейчас в том, чтобы все локальные геометрические построения отображать на геометрические объекты касательного плоского пространства, где реперы являются элементарными и основными векторными конструкциями, с которыми связаны все остальные геометрические объекты.

Такое стремление отобразить все на локальное плоское пространство, помимо чисто математического интереса, обусловлено для физики тем обстоятельством, что только в плоском пространстве геометрический объект допускает физическую интерпретацию, если для него она вообще возможна.

После введения метрики в каждой точке многообразия, кроме аффинных, может быть построено бесконечное множество ортонормированных реперов — тетрад, имеющих общее начало. Тетрада, вообще говоря, есть инвариантное построение

$$\{O,\ \mathbf{n}_{(\alpha)}\},\qquad \alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3,\tag{6.2}$$

ее векторы ортогональны. В случае псевдоэвклидовой метрики касательного пространства, которая нас только и будет интересовать, вектор $\mathbf{n}_{(0)}$ — временноподобный, остальные $n_k(k=1, 2, 3)$ — пространственноподобны. Следовательно,

$$\mathbf{n}_{(0)}\cdot\mathbf{n}_{(0)}=+1,\qquad \mathbf{n}_{(k)}\cdot\mathbf{n}_{(m)}=-\delta_{km}.$$

В каждой точке многообразия среди множества тетрад (6. 2) выберем одну

$$\{O,\ \mathbf{h}_a\},\ a=0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{6. 3}$$

и свяжем с ней локальную галилееву систему координат x^a, которая, как и тетрады, лежит в касательном плоском пространстве. Такой системой координат, очевидно, можно пользоваться лишь в бесконечно малой окрестности каждой точки O, т. е. точки соприкосновения касательного пространства с многообразием [1].

Таким образом, мы построили неоднородное поле координатных тетрад (6. 3), которое так же, как и однородное, образует решетку, но теперь уже неоднородную (деформированную); с этой решеткой оказывается связана координатная сетка x^a, она будет криволинейной, но по-прежнему ортогональной.

Компоненты метрического тензора, определяемого полем тетрад (6. 3), т. е. метрика касательного пространства, запишутся

$$\begin{gathered}\eta_{ab}=\mathbf{h}_a\cdot\mathbf{h}_b,\qquad \eta^{ab}=\mathbf{h}^a\cdot\mathbf{h}^b,\\ \eta_{ab}=\eta^{ab}=\operatorname{diag}\{+1,\ -1,\ -1,\ -1\},\\ \mathbf{h}_a\cdot\mathbf{h}^b=\delta^b_a.\end{gathered} \tag{6. 4}$$

Два различных неоднородных поля координатных тетрад (6. 3), очевидно, связаны ортогональным преобразованием

$$\mathbf{h}_{a'}=\omega^a_{a'}\mathbf{h}_a,\qquad \eta_{a'b'}=\eta_{ab}\omega^a_{a'}\omega^b_{b'}, \tag{6. 5}$$

но теперь коэффициенты $\omega^a_{a'}$ не постоянные. Такие преобразования будем называть локальными вращениями. Собственные координатные сетки в бесконечно малой окрестности каждой точки O также связаны ортогональными преобразованиями

$$dx^{a'}=\omega^{a'}_a dx^a. \tag{6. 6}$$

Мы видим, что они записаны в дифференциальной форме. Причиной этого является, во-первых, способ построения локальной галилеевой системы координат и, во-вторых, тот факт, что определенному повороту можно подвергнуть только бесконечно малый отрезок координатной линии, заменив его бесконечно малым отрезком касательной. Аналитически это сказывается в том, что соотношение (6.6) неинтегрируемо.

Итак, в каждой точке многообразия берут начало два координатных репера — аффинный и ортонормированный (т. е. тетрада):

$$\{O,\ \mathbf{e}_\mu\},\quad \{O,\ \mathbf{h}_a\},\qquad \mu,\ a=0,\ 1,\ 2,\ 3; \tag{6. 7}$$

первый связан с произвольной системой координат x^μ, второй — с локальной галилеевой системой. Скалярные произведения век-

---

[1] Именно в той области, где касательное пространство «сливается» с многообразием с точностью до бесконечно малых первого порядка.

торов, принадлежащих различным реперам, дают связывающие их величины — коэффициенты Ламэ

$$h^{\mu}_{a} = \mathbf{e}^{\mu} \cdot \mathbf{h}_{a}, \qquad h^{a}_{\mu} = \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{h}^{a}, \tag{6.8}$$

с помощью которых соотношения (6. 1) и (6. 4) записываются так:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^{a}_{\mu} h^{b}_{\nu}, \qquad \eta_{ab} = g_{\mu\nu} h^{\mu}_{a} h^{\nu}_{b}. \tag{6.9}$$

По векторам реперов (6. 3) можно разложить любой вектор

$$\mathbf{A} = A_{a}\mathbf{h}^{a} = A^{a}\mathbf{h}_{a}, \tag{6.10}$$

где A^{a}, A_{a} — локальные ортогональные компоненты вектора.

Коэффициенты Ламэ (6. 8) можно рассматривать либо как компоненты векторов аффинного репера относительно ортонормированного

$$\mathbf{e}_{\mu} = h^{a}_{\mu}\mathbf{h}_{a}, \qquad \mathbf{e}^{\mu} = h^{\mu}_{a}\mathbf{h}^{a}, \tag{6.11}$$

либо как компоненты векторов ортонормированного репера относительно аффинного

$$\mathbf{h}_{a} = h^{\mu}_{a}\mathbf{e}_{\mu}, \qquad \mathbf{h}^{a} = h^{a}_{\mu}\mathbf{e}^{\mu}, \tag{6.12}$$

или, наконец, как компоненты смешанного тензора, индексы которого принадлежат различным системам координат.

7. Неголономные координаты, их преобразования и свойства

Преобразования координат (6. 6), записанные в дифференциальной форме, как было отмечено, не могут быть проинтегрированы, так как коэффициенты $\omega^{a'}_{a}$ не являются производными. Такие преобразования и соответствующие им координаты называются неголономными, в отличие от голономных координат X^{a}, x^{μ} и их преобразований

$$x^{\mu} = x^{\mu}(X^{a}), \qquad X^{a} = X^{a}(x^{\mu}), \tag{7.1}$$

где X^{a} — галилеева, x^{μ} — произвольная криволинейная система координат. В дифференциальной форме (7. 1) можно записать так:

$$dx^{\mu} = {}^{*}h^{\mu}_{a} dX^{a}, \qquad {}^{*}h^{\mu}_{a} = \partial x^{\mu}/\partial X^{a}. \tag{7.2}$$

Здесь коэффициенты преобразования ${}^{*}h^{\mu}_{a}$, в отличие от (6. 6), имеют вид производных. Аналогично (7. 2), связь голономных координат x^{μ} и неголономных x^{a} имеет вид

$$dx^{a} = h^{a}_{\mu} dx^{\mu}, \qquad dx^{\mu} = h^{\mu}_{a} dx^{a}, \tag{7.3}$$

где коэффициентами преобразования являются коэффициенты Ламэ (6.8).

Рассмотрим выражение

$$C^{a}_{\mu\nu\cdot} = \frac{1}{2}\{\partial_{\mu} h^{a}_{\nu} - \partial_{\nu} h^{a}_{\mu}\}. \tag{7.4}$$

Преобразование (7. 3) будет голономным только в том случае, если все компоненты (7. 4) равны нулю. Они образуют объект неголономности, являющийся общековариантным тензором в индексах μ, ν.

Поясним на примере различие природы голономных и неголономных координат.

Предположим, что в некотором пространстве перечислены в известном порядке все точки — каждая точка имеет свой номер N. Совершим теперь переход по некоторому пути из точки с номером N_1 в точку N_2. В процессе перемещения номера точек, через которые проходит путь, очевидно, будут изменяться от N_1 до N_2. Если мы выберем другой путь, то и порядок изменения номеров вдоль нового пути будет другим, но тем не менее мы снова придем к номеру N_2.

Иначе говоря, результирующее изменение номера $\Delta N = N_2 - N_1$ не зависит от пути, но определяется положением (номером) начальной и конечной точек пути.

В частности, если мы совершим путешествие по любому замкнутому пути, отправляясь из точки N_1 и возвращаясь в нее, то всегда будет $\Delta N = 0$. Этим очевидным свойством обладает любая нумерация, в том числе и нумерация пространственно-временных событий. Этим же свойством должно обладать и геометрическое отображение нумерации событий, т. е. «хорошая» координатная сетка, в противном случае весь смысл координатной сетки будет утерян.

Мы знаем, что галилеевы координаты X^a обладают этим «хорошим» свойством, т. е. при возвращении в исходную точку галилеевы координаты также принимают исходные значения.

Перейдем теперь к некоторой криволинейной системе координат, согласно (7. 1); при переходе к соседней точке изменения новых dx^μ и старых dX^a координат будут связаны соотношением (7. 2). Найдем изменение новых координат Δx^μ при обходе по замкнутому контуру (этим мы отображаем в новых координатах перемещение по точкам пространства)

$$\Delta x^\mu = \oint {}^*h^\mu_a dX^a = \frac{1}{2} \int \{\partial_a {}^*h^\mu_b - \partial^*_b h^\mu_a\}\, dS^{ab}. \qquad (7.5)$$

Но так как, согласно (7.2), коэффициенты преобразования ${}^*h^\mu_a$ есть производные, находим $\Delta x^\mu = 0$.

Следовательно, система координат x^μ будет «хорошей» только в том случае, если преобразования голономные.

Подсчитав теперь аналогичное изменение в случае неголономных преобразований (7. 3), получим

$$\Delta x^a = \oint h^a_\mu dx^\mu = \int C^a_{\mu\nu\cdot} dS^{\mu\nu} \neq 0. \qquad (7.6)$$

Результат оказывается отличным от нуля, так как объект неголономности $C^a_{\mu\nu\cdot}$ отличен от нуля. Координаты x^a, с нашей точки

зрения, являются «плохими». Таких глобальных координат вообще не существует, ибо соотношение (7. 3) неинтегрируемо. Неголономными координатами можно пользоваться только локально (в бесконечно малой окрестности каждой точки). Неголомные координаты, возникающие в результате преобразования (7. 3), всегда сохраняют обычный метрический смысл, свойственный галилеевым координатам, в то время как произвольные координаты его теряют.

Преобразования (7. 3), вообще говоря, нельзя сделать голономными. Действительно, условия ортогональности и голономности преобразований

$$g^{\mu\nu} h^a_\mu h^b_\nu = \eta^{ab}, \qquad h^a_\mu = \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}$$

дают систему десяти дифференциальных уравнений

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^b}{\partial x^\nu} = \eta^{ab},$$

которым должны удовлетворять четыре функции $x^a = f^a(x^\mu)$. Как известно, в общем случае это невозможно. Когда коэффициенты h^a_μ постоянны, тогда они, очевидно, голономны и могут удовлетворять условиям ортогональности, но это будут линейные преобразования (преобразования Лоренца).

Мы видим, что формализм ортогональных реперов имеет дело с двумя группами преобразований: (A) — группа произвольных преобразований координатной сетки

$$x^{\mu'} = f^{\mu'}(x^\mu), \qquad x^\mu = \varphi^\mu(x^{\mu'}), \tag{7. 7}$$

(B) — группа локальных ортогональных преобразований ортонормированных реперов (лоренцевых вращений)

$$h^\mu_{a'} = \omega^a_{a'} h^\mu_a, \quad h^{a'}_\mu = \omega^{a'}_a h^a_\mu, \tag{7. 8}$$

$$\eta_{ab} \omega^a_{a'} \omega^b_{b'} = \eta_{a'b'}, \quad \omega^a_{a'} \omega^{b'}_a = \delta^{b'}_{a'}.$$

Эти группы имеют существенно различную природу и действуют в различных многообразиях. Группа (A) действует в точечном многообразии — пространстве Римана, группа (B) — в многообразии ортогональных реперов, которые принадлежат касательным плоским пространствам. Ниже мы рассмотрим формализм, ковариантный относительно этих двух групп преобразований.

8. Ковариантное дифференцирование

Изменение ко- или контравариантных компонент вектора при параллельном переносе в случае пространства Римана, как известно, может быть записано в виде (4. 1). Если же вектор задан своими локальными ортогональными компонентами A_a, A^a, то при параллельном переносе, вследствие меняющейся ориентации

ортонормированных реперов, компоненты векторов также будут изменяться. Закон изменения их определим в виде

$$d_p A^a = \gamma^a_{\sigma, \cdot b} A^b dx^\sigma, \qquad d_p A_a = \gamma^b_{\sigma, a\cdot} A_b dx^\sigma. \tag{8. 1}$$

Если потребовать, чтобы скалярное произведение векторов сохранялось при параллельном переносе, т. е.

$$d_p \{A^a B_a\} = (\gamma_{\sigma, ab} + \gamma_{\sigma, ba}) A^a B^b dx^\sigma = 0, \tag{8. 2}$$

то $\gamma_{\sigma, ab}$, называемые коэффициентами вращения Риччи, должны быть антисимметричны в ортогональных индексах: $\gamma_{\sigma, ab} = -\gamma_{\sigma, ba}$. Величины $d\varphi_{ab} = \gamma_{\sigma, ab} dx^\sigma$, которые являются скалярами относительно группы (A), описывают относительный поворот локальных ортореперов, находящихся в точках на расстоянии dx^σ.

Коэффициенты вращения Риччи, подобно символам Кристоффеля, представляют собой коэффициенты связности в неголономной ортогональной системе координат x^a. Они являются компонентами ковариантного вектора относительно группы (A) и объектом связности относительно (B). Воспользовавшись тем, что $A^a = h^a_\mu A^\mu$, получим

$$d_p A^a = h^a_\mu d_p A^\mu + A^\mu \partial_\sigma h^a_\mu dx^\sigma. \tag{8. 3}$$

Подставляя в это выражение (8. 1) и (4. 1), после несложных преобразований найдем связь между коэффициентами вращения Риччи и символами Кристоффеля

$$\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} = h^\mu_a \partial_\sigma h^a_\lambda + \gamma^\mu_{\sigma, \lambda\cdot}, \tag{8. 4}$$

где

$$\gamma^\mu_{\sigma, \lambda\cdot} = \gamma^b_{\sigma, a\cdot} h^a_\lambda h^\mu_b. \tag{8. 5}$$

Соотношение (8.4) представимо также в виде

$$\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} = h^\mu_b h^a_\lambda h^c_\sigma \gamma^b_{c, a\cdot} + h^\mu_a \partial_\sigma h^a_\lambda, \tag{8. 6}$$

который, аналогично (4. 4), можно рассматривать как закон преобразования связности при переходе от голономной системы координат x^μ к неголономной ортогональной x^a, согласно (7. 3).

Из выражения (6. 9) для $g_{\mu\nu}$ легко усмотреть его инвариантность относительно ортогональных преобразований тетрад (6. 5), поэтому и символы Кристоффеля также будут инвариантами. Воспользовавшись этим, найдем закон преобразования коэффициентов вращения Риччи при ортогональных преобразованиях (6. 5). Простые вычисления приводят к формуле, являющейся аналогом (8. 6),

$$\gamma^{b'}_{\sigma, a'\cdot} = \omega^a_{a'} \omega^{b'}_b \gamma^b_{\sigma, a\cdot} + \omega^{b'}_c \partial_\sigma \omega^c_{a'}. \tag{8. 6a}$$

Из этой формулы видно, что если коэффициенты $\omega^b_{a'}$ постоянны, то мы получим тензорный закон преобразования. Точно так же и в случае закона (3. 4), который при линейных преобразованиях координат превращается в тензорный закон преобразования объекта связности.

Воспользовавшись (8. 4) и учитывая симметрию $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}$, выразим коэффициенты вращения Риччи через объект неголономности (7. 4)

$$\gamma_{\sigma,\lambda\mu} = C_{\lambda\sigma,\mu} + C_{\lambda\mu,\sigma} + C_{\sigma\mu,\lambda}, \tag{8. 7}$$

где

$$C_{\lambda\sigma,\mu} = C^{a}_{\lambda\sigma\cdot} h^{b}_{\mu} \eta_{ab}, \qquad C^{a}_{\lambda\sigma\cdot} = \partial_{[\lambda} h^{a}_{\sigma]}. \tag{8. 8}$$

Теперь можно записать ковариантные производные разных типов. Пусть A^{μ}_{a} — некоторый смешанный тензор, тогда ковариантная относительно римановой связности производная будет иметь вид

$$\nabla_{\sigma} A^{\mu}_{a} = \partial_{\sigma} A^{\mu}_{a} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} A^{\lambda}_{a}, \tag{8. 9}$$

при этом ортогональный индекс рассматривается как инвариантный.

Ковариантная относительно связностей $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}$ и $\gamma^{\mu}_{\sigma,\lambda\cdot}$ производная запишется

$$\tilde{\nabla}_{\sigma} A^{\mu}_{a} = \nabla_{\sigma} A^{\mu}_{a} - \gamma^{b}_{\sigma,a\cdot} A^{\mu}_{b}. \tag{8. 10}$$

Выражение (8. 10) является тензором относительно обеих групп преобразований (A) и (B), в то время как (8. 9) является тензором только относительно группы (A). Используя эти производные, а также соотношения (8. 4) и (8. 5), получим следующие важные равенства:

$$\begin{gathered} \tilde{\nabla}_{\sigma} h^{a}_{\mu} = \tilde{\nabla}_{\sigma} h^{\mu}_{a} = 0, \qquad \tilde{\nabla}_{\sigma} g_{\mu\nu} = \nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} = 0, \\ \nabla_{\sigma} h^{\mu}_{a} = \gamma^{b}_{\sigma,a\cdot} h^{\mu}_{b} = \gamma^{\mu}_{\sigma,\lambda\cdot} h^{\lambda}_{a}, \\ \nabla_{\sigma} h^{\sigma}_{a} = \frac{1}{\Lambda} \partial_{\sigma} \{\Lambda h^{\sigma}_{a}\} = \gamma^{\sigma}_{\sigma,a\cdot} = 2C^{\sigma}_{a\sigma\cdot}, \end{gathered} \tag{8. 11}$$

где

$$\Lambda = \sqrt{-g} = \mathrm{Det}\,|h^{a}_{\mu}|.$$

9. Тензор кривизны

Вычисляя изменение вектора, заданного ортогональными компонентами, при параллельном переносе по малому замкнутому контуру, находим

$$\oint d_{p} A_{a} = \frac{1}{2} \int R^{b}_{\mu\nu a\cdot} A_{b} dS^{\mu\nu},$$

где

$$\begin{aligned} R^{b}_{\mu\nu a\cdot} &= \partial_{\mu} \gamma^{b}_{\nu,a\cdot} - \partial_{\nu} \gamma^{b}_{\mu,a\cdot} + \gamma^{b}_{\mu,c\cdot} \gamma^{c}_{\nu,a\cdot} - \gamma^{b}_{\nu,c\cdot} \gamma^{c}_{\mu,a\cdot} = \\ &= 2\nabla_{[\mu} \gamma^{b}_{\nu],a\cdot} + 2\gamma^{b}_{[\mu,|c|\cdot} \gamma^{c}_{\nu],a\cdot} \end{aligned} \tag{9. 1}$$

— тензор Римана—Кристоффеля, заданный смешанными компонентами.

Свертывая (9. 1) с h^{ν}_{b} и поднимая индекс «a» [1], получаем тензор Риччи

$$R^{a}_{\mu} = -\nabla_{\sigma}\gamma^{a\sigma}_{\mu,} + 2\partial_{\mu}C^{ab}_{\cdot b\cdot\cdot}. \tag{9. 2}$$

Свертывая (9. 2) с h^{μ}_{a} и преобразуя, получаем скалярную кривизну пространства

$$R = 4\nabla_{\sigma}C^{\sigma a}_{\cdot a\cdot} - 4C^{ab\cdot}_{b}C^{d}_{ad\cdot} + \gamma_{a,bd}C^{bd,a}. \tag{9. 3}$$

Выражения (9. 1)—(9. 3) могут быть представлены через $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}$, согласно (8. 4), тогда приходим к известным выражениям для $R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma\cdot}$, $R_{\mu\nu}$ и R.

Тождества Бианки для тензора кривизны (9. 1) будут иметь следующий вид:

$$\tilde{\nabla}_{[\sigma}R^{b}_{\mu\nu]a\cdot} = 0, \tag{9. 4}$$

где ковариантные производные соответствуют (8. 10). Производя свертки (9. 4) с коэффициентами Ламэ, мы получим свернутые тождества Бианки в виде либо (4. 13), либо

$$\tilde{\nabla}_{\sigma}\left\{R^{\sigma}_{a} - \frac{1}{2}h^{\sigma}_{a}R\right\} = 0. \tag{9. 5}$$

Ковариантные производные, определенные ранее, некоммутативны, перестановочные соотношения для них легко найти; они имеют следующий вид:

$$-{}^{*}\nabla_{[\mu}{}^{*}\nabla_{\nu]}A_{\sigma} = \frac{1}{2}{}^{*}R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma\cdot}A_{\lambda,} + C^{\lambda}_{\mu\nu\cdot}\nabla_{\lambda}A_{\sigma},$$

$$-\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}A_{\sigma} = \frac{1}{2}R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma\cdot}A_{\lambda},$$

$$-\tilde{\nabla}_{[\mu}\tilde{\nabla}_{\nu]}A_{a} = \frac{1}{2}R^{b}_{\mu\nu a\cdot}A_{b}. \tag{9. 6}$$

Эта некоммутативность обусловлена неинтегрируемостью (неголономностью) объекта связности. С этой точки зрения, тензор кривизны есть тензор неголономности связности, т. е. неголономности закона параллельного перенесения.

Наряду с ковариантными производными можно определить производные по неголономным координатам x^{a} следующим образом:

$$\partial_{a}f = h^{\sigma}_{a}\partial_{\sigma}f, \tag{9. 7}$$

где f — скалярная функция. Эти производные иногда называют производными по направлению h^{σ}_{a}. Они тоже некоммутативны

$$\partial_{[a}\partial_{b]}f = -C^{\sigma}_{ab\cdot}\partial_{\sigma}f = -C^{c}_{ab\cdot}\partial_{c}f, \tag{9. 8}$$

---

[1] Напоминаем, что изменение положения ортогональных индексов осуществляется с помощью галилеевой метрики η_{ab}, η^{ab}, которая одинакова как в локальном, так и в глобальном плоском пространстве.

некоммутативность в этом случае обусловлена неголономностью коэффициентов преобразования h^a_μ.

Формализм ортогональных реперов описывает свойства риманова пространства столь же полно, как и обычный метрический формализм. Действительно, переход к ортогональным реперам сопровождается преобразованием от произвольной голономной системы координат x^μ к неголономной ортогональной системе x^a. Но при таких преобразованиях тензорные свойства преобразуемых объектов не нарушаются, поэтому все основные геометрические свойства пространства, записанные в тензорной форме, конечно, сохраняются.

Отметим, что метрический формализм римановой геометрии, как легко видеть, инвариантен относительно локальных лоренцевых вращений координатных тетрад

$$h^{a'}_\mu = \omega^{a'}_a h^a_\mu, \qquad h^a_\mu = \omega^a_{a'} h^{a'}_\mu; \tag{9.9}$$

подставляя это в (6. 9), находим

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a_\mu h^b_\nu = \eta_{a'b'} h^{a'}_\mu h^{b'}_\nu. \tag{9.10}$$

Отсюда следует, что если заданы $g_{\mu\nu}$, то h^a_μ можно найти только с точностью до произвольных лоренцевых вращений, т. е. с точностью до шести произвольных функций. Этим можно пользоваться для упрощения тензорных выражений.

Все результаты римановой геометрии, записанные в тетрадной формулировке, как мы отмечали, общековариантны относительно группы (B), т. е. локальных лоренцевых вращений. Это значит, что переход от одного неоднородного поля координатных тетрад к другому не вносит никаких новых свойств пространства и в этом смысле аналогичен переходу от одной произвольной координатной сетки к другой. Этому произволу, как увидим, может быть дана физическая интерпретация.

10. Пространство с абсолютным параллелизмом

Пространство, в котором изменение компонент вектора при параллельном переносе не зависит от формы пути переноса, называется пространством с абсолютным параллелизмом [2].

При любом выборе поля ортореперов $\{O, \mathbf{h}_a\}$ можно найти такую связность $\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}$, относительно которой все ортореперы будут абсолютно параллельны, т. е. все они могут считаться порожденными одним из них параллельным переносом его в любую точку пространства. Эта связность имеет следующий вид:

$$\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} = h^\mu_a \partial_\sigma h^a_\lambda. \tag{10.1}$$

Тогда при параллельном переносе любого вектора

$$A^\mu = A^a h^\mu_a \tag{10.2}$$

изменяться будут только компоненты реперных векторов h^μ_a, а коэффициенты разложения A^a — ортогональные компоненты — останутся неизменными. Связность (10. 1) является интегрируемой (голономной), т. е. если заданы компоненты $\bar\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}$, то, интегрируя систему дифференциальных уравнений относительно h^a_μ

$$\partial_\sigma h^a_\mu = \bar\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} h^a_\lambda, \tag{10. 3}$$

мы определим неизвестные функции h^a_λ и, следовательно, можем построить реперы сразу во всем пространстве.

Связность (10. 1) несимметрична, она содержит кручение

$$C^{\mu}_{\sigma\nu\cdot} = \bar\Gamma^\mu_{[\sigma\nu]} = \partial_{[\sigma} h^a_{\nu]} h^\mu_a, \tag{10. 4}$$

совпадающее с объектом неголономности. Легко усмотреть следующие ее свойства:

$$\bar\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} = \frac{1}{\Lambda}\partial_\sigma \Lambda, \qquad \bar\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} = \bar\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} - 2C^b_{ab\cdot} h^a_\sigma,$$

$$g^{\sigma\lambda}\bar\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} = -\frac{1}{\Lambda}\partial_\sigma\{\Lambda g^{\mu\sigma}\} + 2C^{\mu a}_{\cdot\cdot a}. \tag{10. 5}$$

Если $\bar\nabla$ — знак ковариантной относительно связности (10. 1) производной, то

$$\bar\nabla_\sigma h^\mu_a = \bar\nabla_\sigma h^a_\mu = 0, \qquad \bar\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = \bar\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0. \tag{10. 6}$$

Значит, реперные векторы ковариантно постоянны. В силу определения пространство абсолютного параллелизма обладает нулевой кривизной

$$\bar R^\lambda_{\mu\nu\sigma\cdot} = 0. \tag{10. 7}$$

Это условие является необходимым и достаточным для интегрируемости уравнений (10. 3) и, следовательно, для существования поля абсолютно параллельных реперов.

Сравним теперь связности (10. 1) и (8. 4). Очевидно, риманову связность (8. 4) можно записать в виде

$$\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} = \bar\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} + \gamma^\mu_{\sigma,\lambda\cdot}, \tag{10. 8}$$

который показывает, что она разлагается на связность $\bar\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}$ и коэффициенты вращения Риччи. При этом связность $\bar\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}$ компенсирует произвольный выбор координатной сетки, а геометрические свойства пространства описываются коэффициентами Риччи, ибо $\bar\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}$, как мы видели, к кривизне пространства ничего не добавляет.

Таким образом, строго говоря, не существует специального пространства с абсолютным параллелизмом. Связность (10. 1) возникает всякий раз в любом, в том числе и плоском пространстве, в котором осуществляется переход к произвольному полю реперов.

11. Конгруэнции кривых в римановом пространстве

Пусть задано поле u^μ единичного вектора, все компоненты которого — однозначные функции точки. Будем считать, имея в виду дальнейшие приложения, что векторы u^μ — временноподобные, т. е.

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1. \tag{11.1}$$

Поле u^μ задает такое семейство кривых, когда через каждую точку пространства проходит одна и только одна кривая семейства, причем u^μ является полем касательных векторов этого семейства. Такое семейство кривых называется конгруэнцией кривых. Дифференциальное уравнение конгруэнции запишется как

$$\frac{dx^1}{u^1} = \frac{dx^2}{u^2} = \cdots = ds, \tag{11.2}$$

где s — параметр, меняющийся вдоль кривой (в частности, это может быть длина дуги).

При переходе от одной точки многообразия к другой векторное поле u^μ будет изменяться, но так как длина вектора (11. 1) остается неизменной, то все изменение сведется к повороту вектора u^μ. Пусть dx^σ будут компоненты смещения, тогда

$$Du_\mu = (\nabla_\sigma u_\mu)\, dx^\sigma = d\varphi^{\lambda}_{\cdot\mu} u_\lambda, \qquad d\varphi_{\mu\lambda} = -d\varphi_{\lambda\mu}.$$

Положив далее

$$d\varphi_{\lambda\mu} = Q_{\sigma,\,\lambda\mu} dx^\sigma, \tag{11.3}$$

для производной векторного поля u_μ получим

$$\nabla_\sigma u_\mu = Q^{\lambda}_{\sigma,\,\cdot\mu} u_\lambda, \tag{11.4}$$

где величины $Q^{\lambda}_{\sigma,\cdot\mu}$ можно назвать коэффициентами вращения. Они антисимметричны в последних индексах, т. е. имеют тот же характер, что и коэффициенты вращения Риччи, но в отличие от последних являются общековариантными тензорами относительно обеих групп преобразований (A) и (B). Действительно, векторное поле u_μ определено инвариантно, не зависит ни от выбора координатной сетки, ни от выбора поля координатных тетрад $\{O, \mathbf{h}_a\}$, поэтому изменение вектора поля есть также инвариантная величина, и его компоненты Du_μ должны образовывать общековариантный тензор. Тогда из (11. 3) следуют тензорные свойства коэффициентов вращения. Однако в определенной, специально подобранной системе координатных тетрад компоненты $Q_{\sigma,\,\mu\lambda}$ и $\gamma_{\sigma,\,\mu\lambda}$ могут, конечно, совпадать.

Пусть ds в (11. 2) будет элемент длины дуги, тогда

$$u^\sigma \nabla_\sigma u_\mu \equiv \frac{Du_\mu}{ds} = Q_{\sigma,\,\lambda\mu} u^\sigma u^\lambda = f_\mu, \qquad u^\mu f_\mu = 0, \tag{11.5}$$

где f_μ — поле вектора первой кривизны конгруэнции [5]. Ковариантную производную поля u^μ можно записать в следующем виде:

$$\nabla_\sigma u_\mu = B_{\sigma\mu} + u_\sigma f_\mu, \tag{11.6}$$

где тензор $B_{\sigma\mu}$, как видно из (11. 6), удовлетворяет соотношениям

$$B_{\sigma\mu} u^\sigma = 0, \qquad B_{\sigma\mu} u^\mu = 0; \tag{11.7}$$

это значит, что он находится в локальном трехмерном пространстве, ортогональном u^μ (лежит в локальном V_3). Тензор $B_{\mu\sigma}$ может быть выражен через коэффициенты вращения

$$B_{\sigma\mu} = Q^{\lambda}_{\tau,\, \cdot\mu} u_\lambda \varepsilon^\tau_\sigma, \qquad \varepsilon^\tau_\sigma = \delta^\tau_\sigma - u^\tau u_\sigma, \tag{11.8}$$

где ε^τ_σ — тензор проектирования на локальное V_3.

Рассмотрим теперь конгруэнции различного типа.

Геодезическая конгруэнция. В этом случае она состоит из геодезических линий, что означает

$$f_\mu = Q_{\sigma,\, \lambda\mu} u^\sigma u^\lambda = 0, \qquad \nabla_\sigma u_\mu = B_{\sigma\mu} = Q_{\sigma,\, \lambda\mu} u^\lambda. \tag{11.9}$$

Конгруэнция нормальная. Она состоит из кривых, ортогональных семейству гиперповерхностей, например $\Phi(x^\mu) = \mathrm{const}$. В этом случае должно иметь место следующее равенство:

$$u_\mu = q \partial_\mu \Phi, \tag{11.10}$$

где q — скалярная функция точки.

Поле u_μ будет иметь вид (11. 10) при условии, что

$$u_\sigma H_{\mu\nu} + u_\mu H_{\nu\sigma} + u_\nu H_{\sigma\mu} = 0, \ \frac{1}{2} H_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} u_{\nu]}, \tag{11.11}$$

где $H_{\mu\nu}$ — ротация поля u_μ. Это можно записать и в таком виде:

$$u_{[\sigma} \nabla_\mu u_{\nu]} = 0, \tag{11.12}$$

где векторные скобки, как обычно, обозначают антисимметризацию по всем трем индексам. Подставляя сюда (11. 6), получим

$$u_{[\sigma} B_{\mu\nu]} = 0. \tag{11.13}$$

Отсюда, вследствие (11. 7), находим

$$B_{[\mu\nu]} = 0, \tag{11.14}$$

т. е. тензор $B_{\mu\nu}$ симметричен. Непосредственным дифференцированием (11. 10) можно доказать достаточность условия (11. 14) для нормальности конгруэнции.

Конгруэнция нормальная и геодезическая. Выражение (11. 6) при условиях (11. 9) и (11.14) дает

$$\nabla_\sigma u_\mu = B_{\sigma\mu} = B_{\mu\sigma}, \tag{11.15}$$

что равносильно следующему:

$$\frac{1}{2} H_{\mu\sigma} = \partial_{[\mu} u_{\sigma]} = 0, \tag{11.16}$$

т. е. ротация поля u_μ, задающего нормальную и геодезическую конгруэнцию, равна нулю.

Рассмотрим еще одно замечательное свойство такой конгруэнции. Дифференцируя (11. 10), находим

$$\nabla_\sigma u_\mu = q\nabla_\sigma\nabla_\mu\Phi + (\nabla_\sigma q)(\nabla_\mu\Phi) = \nabla_\mu u_\sigma - \frac{1}{q} u_\sigma\nabla_\mu q + (\nabla_\sigma q)(\nabla_\mu\Phi). \qquad (11.\ 17)$$

Здесь мы воспользовались равенством, которое легко проверить:

$$\nabla_\sigma\nabla_\mu\Phi = \nabla_\mu\nabla_\sigma\Phi. \qquad (11.\ 18)$$

Умножая (11. 17) на u^σ и учитывая условие геодезичности (11. 9), получим

$$\partial_\mu q = \frac{dq}{ds} u_\mu. \qquad (11.\ 19)$$

Это показывает, что q постоянно на V_3 и, таким образом, оно является функцией только от Ф. Тогда, умножая (11. 10) на u^μ, находим

$$ds = u_\mu dx^\mu = q(\Phi)\, d\Phi, \qquad s_2 - s_1 = \int\limits_{\Phi_1}^{\Phi_2} q d\Phi. \qquad (11.\ 20)$$

Следовательно, два нормальных V_3 к одной нормальной и геодезической конгруэнции вырезают на кривых этой конгруэнции дуги равной длины.

Конформно геодезические конгруэнции. Это такие неизотропные конгруэнции в римановом пространстве, которые могут быть переведены в геодезические конформным преобразованием метрики.

Пусть в римановом пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$ задана конгруэнция кривых с полем касательных векторов u^μ, тогда, согласно (11. 6), мы имеем

$$\nabla_\sigma u_\mu = B_{\sigma\mu} + u_\sigma f_\mu, \qquad u^\sigma\nabla_\sigma u_\mu = f_\mu,$$
$$B_{\sigma\mu}u^\sigma = B_{\sigma\mu}u^\mu = f_\mu u^\mu = 0. \qquad (11.\ 21)$$

Подвергая метрику конформному преобразованию (5. 3), аналогично (5. 4), получаем

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\varphi}g_{\mu\nu}, \qquad \tilde{g}^{\mu\nu} = e^{-2\varphi}g^{\mu\nu}, \qquad \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + S^\lambda_{\mu\nu}, \qquad (11.\ 22)$$

где

$$S^\lambda_{\mu\nu} = \varphi_\mu\delta^\lambda_\nu + \varphi_\nu\delta^\lambda_\mu - \varphi^\lambda g_{\mu\nu}. \qquad (11.\ 23)$$

Далее, компоненты векторного поля u^μ преобразуются в соответствии с (5. 11) по закону

$$\tilde{u}^\mu = e^{-\varphi}u^\mu, \qquad \tilde{u}_\mu = e^{\varphi}u_\mu. \qquad (11.\ 24)$$

Тогда, преобразуя первое из выражений (11. 21), мы получим

$$\tilde{\nabla}_\sigma\tilde{u}_\mu = \tilde{B}_{\sigma\mu} + \tilde{u}_\sigma\tilde{f}_\mu, \qquad (11.\ 25)$$

где введены следующие обозначения:

$$\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{u}_\mu = \partial_\sigma \tilde{u}_\mu - \tilde{\Gamma}^\lambda_{\sigma\mu} \tilde{u}_\lambda, \qquad \tilde{B}_{\sigma\mu} = e^\varphi \{B_{\sigma\mu} - S^\tau_{\alpha\beta} u_\tau \varepsilon^\alpha_\sigma \varepsilon^\beta_\mu\},$$

$$\tilde{f}_\mu = f_\mu - S^\tau_{\alpha\beta} u_\tau u^\beta \varepsilon^\alpha_\mu. \tag{11.26}$$

Здесь $\tilde{B}_{\sigma\mu}$ и $\tilde{f}_\mu$ имеют прежний смысл и обладают теми же свойствами, что и $B_{\sigma\mu}$ и f_μ, но для конгруэнции в новой метрике, испытавшей конформное преобразование. В нашем случае тензор аффинной деформации $S_{\alpha\beta}^{\;\tau}$ имеет конкретный вид (11. 23); подставляя его в (11. 26), найдем

$$\tilde{B}_{\sigma\mu} = e^\varphi \{B_{\sigma\mu} + \lambda \varepsilon_{\sigma\mu}\}, \qquad \lambda = u^\tau \varphi_\tau = \frac{d\varphi}{ds}, \qquad \varepsilon_{\sigma\mu} = g_{\sigma\mu} - u_\sigma u_\mu, \tag{11.27}$$

$$\tilde{f}_\mu = f_\mu - \varphi_\tau \varepsilon^\tau_\mu. \tag{11.28}$$

Если мы хотим, чтобы новая конгруэнция была геодезической, то должны обратить вектор $\tilde{f}_\mu$ — вектор первой кривизны конгруэнции — в нуль. Это дает

$$f_\mu = \varphi_\tau \varepsilon^\tau_\mu, \tag{11.29}$$

т. е. конгруэнция является конформно геодезической тогда и только тогда, когда вектор первой кривизны этой конгруэнции является компонентой некоторого градиентного вектора, ортогональной касательному вектору [5].

Пусть конгруэнция (исходная) — нормальная; тогда, воспользовавшись (11. 10) и вычислив f_μ, согласно (11. 21), мы имеем

$$f_\mu = -\varepsilon^\sigma_\mu \partial_\sigma \ln q. \tag{11.30}$$

Сравнивая с (11. 29), получим

$$\varphi_\tau = -\partial_\tau \ln q, \qquad q = e^{-\varphi}; \tag{11.31}$$

подставляя найденные величины в (11. 24), приходим к следующему результату:

$$\tilde{u}_\mu = e^\varphi u_\mu = e^\varphi q \Phi_{,\sigma} = \Phi_{,\sigma}, \qquad \tilde{H}_{\sigma\mu} = 2\partial_{[\sigma}\tilde{u}_{\mu]} = 0. \tag{11.32}$$

Это значит, что нормальную конгруэнцию можно всегда преобразовать в геодезическую, при этом конформная функция сразу находится из (11. 31). Отметим, что конформные преобразования не нарушают нормальности конгруэнции, так как к тензору $B_{\sigma\mu}$ в результате преобразования в соответствии с (11. 27) добавляется всегда симметричный тензор $\lambda\varepsilon_{\sigma\mu}$. Отсюда также следует, что конформным преобразованием невозможно превратить произвольную конгруэнцию в нормальную.

12. Коэффициенты вращения

Введем инвариантное поле тетрад, связанное с конгруэнциями кривых, рассмотренных в предыдущем разделе

$$\{O, \mathbf{n}_{(\alpha)}\}, \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3. \tag{12.1}$$

Индексы в скобках (номера векторов), как и сами векторы, инвариантны относительно обеих групп преобразований (A) и (B) (см. раздел 7). Вектор $\mathbf{n}_{(0)}$, как обычно, временноподобный и является касательным к кривой. Таким образом, $\mathbf{n}_{(0)}=\mathbf{u}$ (см. раздел 11). Остальная часть тетрады (пространственноподобная декартова триада) кривой не определена, т. е. тетрада (12. 1) не является, вообще говоря, репером Френе.

Введем в каждой точке еще взаимную тетраду

$$\{O,\ \mathbf{n}^{(\alpha)}\},\qquad \alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{12.2}$$

такую, что

$$\begin{aligned} &n^{(\sigma)}_{\alpha}n^{\beta}_{(\sigma)}=n^{\sigma}_{(\alpha)}n^{(\beta)}_{\sigma}=\delta^{\beta}_{\alpha}, \qquad && \eta_{(\alpha)(\beta)}=g_{\mu\nu}n^{\mu}_{(\alpha)}n^{\nu}_{(\beta)},\\ &\eta^{(\alpha)(\beta)}=g^{\mu\nu}n^{(\alpha)}_{\mu}n^{(\beta)}_{\nu}, && \eta_{(\alpha)(\varepsilon)}\eta^{(\beta)(\varepsilon)}=\delta^{\beta}_{\alpha}. \end{aligned} \tag{12.3}$$

С помощью инвариантных матриц $\eta_{(\alpha)(\beta)}$ и $\eta^{(\alpha)(\beta)}$ можно поднимать и опускать инвариантные индексы обычным образом:

$$\begin{aligned} &A_{(\alpha)}=\eta_{(\alpha)(\beta)}A^{(\beta)}, \qquad && A^{(\alpha)}=\eta^{(\alpha)(\beta)}A_{(\beta)},\\ &A_{(0)}=A^{(0)}, && A_{(k)}=-A^{(k)}, \qquad k=1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

Компоненты этих матриц численно равны компонентам галилеевой метрики η_{ab} и η^{ab}, но характер их совершенно иной. Действительно, если от неголономной ортогональной системы координат, к которой принадлежат η_{ab} и η^{ab}, перейти к неголономной и неортогональной, то η_{ab} перейдут в $g_{ab}\neq\mathrm{diag}\ \{+1,\ -1,\ -1,\ -1\}$, в то время как $\eta_{(\alpha)(\beta)}$ останутся инвариантными. Это видно из их определения.

Используя поля (12. 1) и (12. 2), вычислим коэффициенты вращения (11. 4) и установим в самом общем случае информацию, которую они содержат.

При некотором смещении dx^{σ} тетрадные векторы испытают изменение $Dn^{\mu}_{(\alpha)}$, где D — ковариантный дифференциал

$$Dn^{\mu}_{(\alpha)}=\nabla_{\sigma}n^{\mu}_{(\alpha)}dx^{\sigma}; \tag{12.4}$$

так как длина векторов при этом не меняется (их квадраты всегда равны, согласно (12. 3),

$$g_{\mu\nu}n^{\mu}_{(0)}n^{\nu}_{(0)}=+1,\qquad g_{\mu\nu}n^{\mu}_{(k)}n^{\nu}_{(k)}=-1,\qquad k=1,\ 2,\ 3, \tag{12.5}$$

(здесь суммирования по k нет)), то изменение вектора будет обусловлено только его поворотом. Разложим бесконечно малые векторы (12. 4) по векторам исходной тетрады (12. 1)

$$Dn^{\mu}_{(\alpha)}=d\varphi^{(\beta)}_{(\alpha)\cdot}n^{\mu}_{(\beta)}=Q^{(\beta)}_{\sigma,\,(\alpha)\cdot}n^{\mu}_{(\beta)}dx^{\sigma}, \tag{12.6}$$

где $d\varphi_{(\alpha)(\beta)}=-d\varphi_{(\beta)(\alpha)}$ есть инвариантная матрица относительного поворота векторов при смещении на dx^{σ} (ср. раздел 8). Из (12. 6) для производной от тетрадных векторов находим

$$\nabla_{\sigma}n^{\mu}_{(\alpha)}=Q^{(\beta)}_{\sigma,\,(\alpha)\cdot}n^{\mu}_{(\beta)}=Q^{\mu}_{\sigma,\,\lambda\cdot}n^{\lambda}_{(\alpha)}. \tag{12.7}$$

Коэффициенты вращения всегда можно превратить или в общековариантный тензор третьего ранга путем свертки с тетрадными векторами, или в набор скалярных коэффициентов

$$Q^{\mu}_{\sigma,\,\lambda\cdot} = Q^{(\beta)}_{\sigma,\,(\alpha)\cdot} n^{(\alpha)}_{\lambda} n^{\mu}_{(\beta)}, \qquad Q^{(\beta)}_{(\varepsilon),\,(\alpha)\cdot} = Q^{(\beta)}_{\sigma,\,(\alpha)\cdot} n^{\sigma}_{(\varepsilon)}. \tag{12.8}$$

Запишем ротацию тетрадных векторов

$$\nabla_{\mu} n^{(\alpha)}_{\nu} - \nabla_{\nu} n^{(\alpha)}_{\mu} \equiv H^{(\alpha)}_{\mu\nu\cdot}; \tag{12.9}$$

она является общековариантным тензором в индексах (μ, ν), индекс (α), как мы знаем, инвариантен. Заменяя здесь производные с помощью (12. 7), находим

$$\{Q^{\lambda}_{\mu,\,\cdot\nu} - Q^{\lambda}_{\nu,\,\cdot\mu}\}\, n^{(\alpha)}_{\lambda} = H^{(\alpha)}_{\mu\nu\cdot\cdot}. \tag{12.10}$$

Умножая последнее на $n^{\sigma}_{(\alpha)} g_{\sigma\tau}$, получим

$$Q_{\mu,\,\tau\nu} - Q_{\nu,\,\tau\mu} = H_{\mu\nu,\,\tau}. \tag{12.11}$$

С помощью круговой замены индексов написав еще два равенства и разрешив систему относительно $Q_{\mu,\,\tau\nu}$, придем к выражению

$$Q_{\mu,\,\tau\nu} = \frac{1}{2}\left(H_{\tau\nu,\,\mu} + H_{\tau\mu,\,\nu} + H_{\mu\nu,\,\tau}\right) \tag{12.12}$$

для коэффициентов вращения через ротации тетрадных векторов аналогично тому, как представляются коэффициенты вращения Риччи (8. 7), (8.8) через объект неголономности. Выражение (12.12) можно записать в инвариантных индексах, умножив его на $n^{\mu}_{(\varepsilon)} n^{\tau}_{(\alpha)} n^{\nu}_{(\beta)}$,

$$2Q_{(\varepsilon),\,(\alpha)(\beta)} = H_{(\alpha)(\beta),\,(\varepsilon)} + H_{(\alpha)(\varepsilon),\,(\beta)} + H_{(\varepsilon)(\beta),\,(\alpha)}. \tag{12.13}$$

Эти выражения являются, очевидно, общековариантными скалярами относительно обеих групп преобразований (A) и (B).

Запишем производную от поля касательных векторов, положив в (12. 7) инвариантный индекс $\alpha=0$,

$$\nabla_{\sigma} n^{\mu}_{(0)} = Q^{(\beta)}_{\sigma,\,(0)\cdot} n^{\mu}_{(\beta)} =$$
$$= \{Q_{(k),\,(0)(l)}\, n^{(k)}_{\sigma} + Q_{(0),\,(0)(l)}\, n^{(0)}_{\sigma}\}\, n^{\mu}_{(m)} \eta^{(l)(m)}. \tag{12.14}$$

По латинским индексам k, l, m, . . ., как всегда, суммирование ведется от 1 до 3. Введем следующие обозначения:

$$H_{(\alpha)(\beta),\,(0)} \equiv H_{(\alpha)(\beta)}, \qquad Q_{(0),\,(0)(l)} = H_{(0)(l),\,(0)} \equiv H_{(0)(l)}, \tag{12.15}$$

$$B_{(k)(l)} \equiv Q_{(k),\,(0)(l)} = \frac{1}{2}\{H_{(0)(l),\,(k)} + H_{(0)(k),\,(l)}\} + \frac{1}{2} H_{(k)(l)}. \tag{12.16}$$

Подставляя все это в (12. 14), получим

$$\nabla_{\sigma} n^{\mu}_{(0)} = B^{\mu}_{\sigma\cdot} + n^{(0)}_{\sigma} f^{\mu}, \tag{12.17}$$

при этом

$$B^{\mu}_{\sigma\cdot} = B^{(m)}_{(k)\cdot} n^{(k)}_{\sigma} n^{\mu}_{(m)}, \qquad f^{\mu} = H^{(m)}_{(0)\cdot,\,(0)} n^{\mu}_{(m)} = H^{\mu}_{\lambda\cdot} n^{\lambda}_{(0)}. \tag{12.18}$$

Сравнивая (12. 18) и (11. 6), мы видим, что вектор первой кривизны конгруэнции f^{μ} выражается через ротацию поля касательных векторов $n^{(0)}_{\mu}=u_{\mu}$ так же, как вектор лоренцевой силы в электродинамике через напряженность электромагнитного поля.

Разложим тензор $B_{\sigma\mu}$ на симметричную и антисимметричную составляющие:

$$B_{\sigma\mu}=B_{(k)(m)}n^{(k)}_{\sigma}n^{(m)}_{\mu}=B_{(\sigma\mu)}+B_{[\sigma\mu]}, \tag{12.19}$$

где

$$\begin{aligned} B_{(\sigma\mu)} &= \frac{1}{2}\{H_{(0)(k),(m)}+H_{(0)(m),(k)}\}\, n^{(k)}_{\sigma}n^{(m)}_{\mu}, \\ B_{[\sigma\mu]} &= \frac{1}{2}H_{(k)(m)}n^{(k)}_{\sigma}n^{(m)}_{\mu}. \end{aligned} \tag{12.20}$$

Из выражения (12. 18) видно, что для тензора $B_{\sigma\mu}$ имеют место соотношения (11. 7).

Теперь, сопоставляя выражения (12. 17)—(12. 20), можно заметить, что все свойства конгруэнции определяются скалярами $H_{(\alpha)(\beta),(\varepsilon)}$. В частности, рассмотренные в предыдущем разделе три типа конгруэнций определяются скалярами $H_{(\alpha)(\beta),(0)}\equiv H_{(\alpha)(\beta)}$, которые представляют собой компоненты ротации вектора $n^{(0)}_{\mu}$, спроектированные на эти же тетрады. Так, например:

1) если конгруэнция геодезическая, то

$$f_{\mu}=H_{(0)(k)}n^{(k)}_{\mu}=0, \qquad H_{(0)(k)}=0; \tag{12.21}$$

2) если конгруэнция нормальная, то

$$H_{(k)(m)}=0; \tag{12.22}$$

3) если конгруэнция нормальная и геодезическая, то, учитывая предыдущие случаи, находим

$$H_{(\alpha)(\beta)}=0. \tag{12.23}$$

Для выяснения роли ротации других векторов рассмотрим поведение тетрады $\{O, \mathbf{n}_{(\alpha)}\}$ при смещении в направлениях, задаваемых тетрадными векторами. Для этого запишем производную вектора $n^{\mu}_{(\alpha)}$ по направлению $n^{\sigma}_{(\varepsilon)}$

$$\frac{\delta n^{\mu}_{(\alpha)}}{\delta s^{(\varepsilon)}}\equiv n^{\sigma}_{(\varepsilon)}\nabla_{\sigma}n^{\mu}_{(\alpha)}=Q^{(\beta)}_{(\varepsilon),(\alpha)}n^{\mu}_{(\beta)}. \tag{12.24}$$

Учитывая предыдущие обозначения и вводя еще одно

$$Q_{(0),(m)(k)}=\frac{1}{2}\{H_{(m)(0),(k)}-H_{(k)(0),(m)}\}+$$
$$+\frac{1}{2}H_{(m)(k),(0)}=\omega_{(m)(k)}+\frac{1}{2}H_{(m)(k)}, \tag{12.25}$$

мы получим

$$\frac{\delta n^{\mu}_{(0)}}{\delta s^{(0)}} = f^{\mu},$$

$$\frac{\delta n^{\mu}_{(m)}}{\delta s^{(0)}} = \left\{\omega^{\cdot(k)}_{(m)} + \frac{1}{2} H^{\cdot(k)}_{(m)}\right\} n^{\mu}_{(k)} - f_{(m)} n^{\mu}_{(0)}; \tag{12. 26}$$

$$\frac{\delta n^{\mu}_{(0)}}{\delta s^{(k)}} = B^{\cdot(l)}_{(k)} n^{\mu}_{(l)},$$

$$\frac{\delta n^{\mu}_{(m)}}{\delta s^{(k)}} = Q^{(l)}_{(k),\,(m)\cdot} n^{\mu}_{(l)} - B_{(k)\,(m)} n^{\mu}_{(0)}. \tag{12. 27}$$

Система (12. 26) описывает поведение тетрады при смещении вдоль линии конгруэнции, а система (12. 27) — при смещении вдоль локального V_3.

Для нормальной и геодезической конгруэнции, т. е. когда

$$f^{\mu} = 0, \qquad H^{(k)}_{(m)\cdot} = 0, \qquad B_{(k)\,(m)} = B_{(m)\,(k)},$$

система (12. 26) примет вид

$$\frac{\delta n^{\mu}_{(0)}}{\delta s^{(0)}} = 0, \qquad \frac{\delta n^{\mu}_{(m)}}{\delta s^{(0)}} = \omega^{(k)}_{(m)\cdot} n^{\mu}_{(k)}, \tag{12. 28}$$

а система (12. 27) сохранит свой вид, только компоненты $B_{(k)\,(m)}$ следует теперь считать симметричными.

Второе из уравнений (12. 28) показывает, что декартова триада $\{O,\ n^{\mu}_{(k)}\}$, $k=1,\ 2,\ 3$ при смещении вдоль геодезической вращается с угловой «скоростью» $\omega^{\cdot(k)}_{(m)}$. Первое уравнение в системе (12. 27) описывает изменение нормали к гиперповерхности $\Phi\,(x^{\mu}) = \mathrm{const}$ (конгруэнция нормальная) при смещении вдоль этой гиперповерхности. Второе уравнение дает относительное изменение (относительный поворот) декартовой триады при том же смещении.

Рассмотрим еще более частный случай: положим $B_{(k)\,(m)}=0$, тогда система (12. 28) остается без изменения, а система (12. 27) принимает вид

$$\frac{\delta n^{\mu}_{(0)}}{\delta s^{(k)}} = 0, \qquad \frac{\delta n^{\mu}_{(m)}}{\delta s^{(k)}} = Q^{(l)}_{(k),\,(m)\cdot} n^{\mu}_{(l)}. \tag{12. 29}$$

Первые уравнения в системах (12. 28) и (12. 29) говорят о том, что $n^{\mu}_{(0)}$ — поле ковариантно постоянных векторов. В плоском пространстве это поле определяет конгруэнцию параллельных прямых, при движении вдоль которых декартовы триады вращаются с угловой «скоростью» $\omega^{(k)}_{(m)\cdot}$. При смещении в ортогональной гиперплоскости триады изменяют свою относительную ориентацию и это изменение описывается пространственными компонентами $Q^{(l)}_{(k)(m)\cdot}$.

Всей этой картине, очевидно, может быть дана простая физическая интерпретация.

Если мы специализируем выбор поля инвариантных тетрад, а именно, зададим векторы декартовой триады $\mathbf{n}_{(k)}$, $k=1,\ 2,\ 3,$

в направлении векторов первой, второй и третьей кривизны данной линии конгруэнции соответственно, то система (12. 26) превратится в уравнения Френе. Вторая система уравнений (12. 27) будет описывать изменение реперов Френе при переходе от одной линии конгруэнции к другой вдоль локального V_3. Действительно, положив в системе (12. 24) $\varepsilon=0$, получим

$$\frac{\delta n^{\mu}_{(\alpha)}}{\delta s^{(0)}}=Q^{(\beta)}_{(0),\,(\alpha)\cdot}n^{\mu}_{(\beta)}. \tag{12. 30}$$

Если вектор $n^{\mu}_{(1)}$ задан в направлении изменения вектора касательной $n^{\mu}_{(0)}$, то имеем

$$Q^{(\beta)}_{(0),\,(0)\cdot}n^{\mu}_{(\beta)}=Q^{(1)}_{(0),\,(0)\cdot}n^{\mu}_{(1)}=f^{(1)}n^{\mu}_{(1)}, \tag{12. 31}$$

где $f^{(1)}$, очевидно, — первая кривизна кривой. Полагая в (12. 30) $\alpha=1$ и выбирая тетраду так, чтобы изменение вектора $n^{\mu}_{(1)}$ лежало в плоскости, определяемой векторами $n^{\mu}_{(0)}$ и $n^{\mu}_{(2)}$, что всегда возможно, запишем

$$Q^{(\beta)}_{(0),\,(1)\cdot}n^{\mu}_{(\beta)}=Q^{(0)}_{(0),\,(1)\cdot}n^{\mu}_{(0)}+Q^{(2)}_{(0),\,(1)\cdot}n^{\mu}_{(2)}=k^{(2)}n^{\mu}_{(2)}-f_{(1)}n^{\mu}_{(0)}. \tag{12. 32}$$

Поступая аналогичным образом далее:

$$\begin{aligned}Q^{(\beta)}_{(0),\,(2)\cdot}n^{\mu}_{(\beta)}&=-k_{(2)}n^{\mu}_{(1)}+k^{(3)}n^{\mu}_{(3)},\\ Q^{(\beta)}_{(0),\,(3)\cdot}n^{\mu}_{(\beta)}&=-k_{(3)}n^{\mu}_{(2)},\end{aligned} \tag{12. 33}$$

и подставляя полученные разложения в (12. 30), найдем уравнения Френе, где $k^{(2)}$ и $k^{(3)}$ — вторая и третья кривизны соответственно:

$$\begin{aligned}\frac{\delta n^{\mu}_{(0)}}{\delta s^{(0)}}&=f^{(1)}n^{\mu}_{(1)},\\ \frac{\delta n^{\mu}_{(1)}}{\delta s^{(0)}}&=k^{(2)}n^{\mu}_{(2)}-f_{(1)}n^{\mu}_{(0)},\\ \frac{\delta n^{\mu}_{(2)}}{\delta s^{(0)}}&=k^{(3)}n^{\mu}_{(3)}-k_{(2)}n^{\mu}_{(1)},\\ \frac{\delta n^{\mu}_{(3)}}{\delta s^{(0)}}&=-k_{(3)}n^{\mu}_{(2)}.\end{aligned} \tag{12. 34}$$

Сравнивая эту систему с более общей (12. 26), мы видим, что кривизны $k^{(2)}$ и $k^{(3)}$ характеризуют скорость поворота декартовой триады при смещении в направлении кривой.

Рассмотрим еще одно поле специализированных реперов — реперы Ферми—Уолкера.

Потребуем, чтобы при смещении вдоль кривой декартова триада $\{O,\ n^{\mu}_{(k)}\}$ не вращалась. Для системы (12. 26) это значит, что

$$\omega^{(k)}_{(m)\cdot}+\frac{1}{2}H^{(k)}_{(m)\cdot}\equiv Q^{(k)}_{(0),\,(m)\cdot}=0; \tag{12. 35}$$

в случае реперов Френе это сводится к равенству

$$k^{(2)} = k^{(3)} = 0. \tag{12.36}$$

Тогда система (12. 26) принимает вид

$$\frac{\delta n^{\mu}_{(0)}}{\delta s^{(0)}} = f^{\mu}, \qquad \frac{\delta n^{\mu}_{(m)}}{\delta s^{(0)}} = -f_{(m)} n^{\mu}_{(0)}, \tag{12.37}$$

что соответствует следующему выражению для коэффициентов вращения:

$$Q^{(\beta)}_{(0),\,(\alpha)\cdot} = f_{(k)} \left\{ \delta^{(0)}_{(\alpha)} \eta^{(k)\,(\beta)} - \delta^{(k)}_{(\alpha)} \eta^{(0)\,(\beta)} \right\} \tag{12.38}$$

или

$$Q_{(0),\,(\alpha)\,(\beta)} = \delta^{(0)}_{\alpha} f_{(\beta)} - \delta^{(0)}_{(\beta)} f_{(\alpha)}. \tag{12.38a}$$

В случае, когда вектор $n^{\mu}_{(1)}$ направлен по вектору f^{μ}, имеем $f_{(2)} = f_{(3)} = 0$, тогда (12. 38) запишется в виде

$$Q^{(\beta)}_{(0),\,(\alpha)\cdot} = f_{(1)} \left\{ \delta^{(0)}_{(\alpha)} \eta^{(1)\,(\beta)} - \delta^{(1)}_{(\alpha)} \eta^{(0)\,(\beta)} \right\}. \tag{12.39}$$

Соотношение (12. 35) показывает, что репер Ферми—Уолкера можно интерпретировать как локальную невращающуюся лоренцеву систему.

13. Аффинор

В результате преобразования координат (2. 2), как мы видели, векторы и реперы[1] преобразуются по законам

$$A_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} A_{\mu}, \qquad A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu}, \tag{13.1}$$

$$\mathbf{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \mathbf{e}_{\mu}, \quad \{O,\ \mathbf{e}_{\mu}\} \to \{O,\ \mathbf{e}_{\mu'}\}. \tag{13.2}$$

На первый взгляд может показаться, что эти законы противоречат друг другу. В самом деле, с одной стороны, при преобразовании компонент вектора (13. 1) сам вектор никаких новых свойств не приобретает — его длина, относительное расположение, если векторов несколько, остаются неизменными. С другой стороны, в результате преобразования (13. 2) с теми же коэффициентами возникает совершенно новый репер $\{O,\ \mathbf{e}_{\mu'}\}$, его векторы $\mathbf{e}_{\mu'}$ имеют длину и относительное расположение совсем иные, чем векторы $\mathbf{e}_{\mu}$ репера $\{O,\ \mathbf{e}_{\mu}\}$. В действительности противоречия нет, ибо результаты преобразований (13. 1) и (13. 2) просто нельзя сравнивать — эти законы имеют принципиально различную природу. Закон (13. 2) есть частный случай аффинора, к рассмотрению которого мы и перейдем.

---

[1] Здесь имеются в виду координатные реперы.

Аффинором называется закон, устанавливающий линейную зависимость вектора-функции от вектора-аргумента [2]. Символически это запишется так:

$$\mathbf{A}' = \Omega \mathbf{A}, \tag{13. 3}$$

при этом в силу линейности должно иметь место следующее равенство:

$$\Omega(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) = \alpha \Omega \mathbf{A} + \beta \Omega \mathbf{B}, \tag{13. 4}$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — произвольные векторы, α и β — произвольные скаляры. Подчеркнем здесь, что аффинор Ω, по определению, действует только на векторы.

Рассмотрим операцию (13. 3) подробнее. Пусть задан некоторый репер $\{O, \mathbf{n}_{(\alpha)}\}$, тогда вектор $\mathbf{A}$ можно разложить по векторам этого репера

$$\mathbf{A} = A^{(\alpha)} \mathbf{n}_{(\alpha)}, \tag{13. 5}$$

где $A^{(\alpha)}$ — компоненты вектора (скаляры) относительно данного репера. Подставим (13. 5) в (13. 3), тогда получим

$$\mathbf{A}' = \Omega \{A^{(\alpha)} \mathbf{n}_{(\alpha)}\} = A^{(\alpha)} \Omega \mathbf{n}_{(\alpha)} = A^{(\alpha)} \mathbf{n}'_{(\alpha)}.$$

Таким образом, мы имеем

$$\mathbf{A}' = A^{(\alpha)} \mathbf{n}'_{(\alpha)}, \qquad \mathbf{n}'_{(\alpha)} = \Omega \mathbf{n}_{(\alpha)}, \tag{13. 6}$$

т. е. новый вектор $\mathbf{A}'$ разлагается по векторам нового репера $\{O, \mathbf{n}'_{(\alpha)}\}$ с теми же коэффициентами $A^{(\alpha)}$, что и вектор $\mathbf{A}$ относительно старого репера. Новый вектор $\mathbf{A}'$ будет иметь отличное от $\mathbf{A}$ направление и, вообще говоря, другую длину. Конечно, новый вектор $\mathbf{A}'$ можно отнести и к старому реперу $\{O, \mathbf{n}_{(\alpha)}\}$, но тогда его компоненты будут, очевидно, другими.

Найдем теперь оператор, который скрывается за символом Ω. Для этого разложим векторы нового репера по векторам старого

$$\mathbf{n}'_{(\alpha)} = \Omega \mathbf{n}_{(\alpha)} = \Omega_{(\alpha)}^{\cdot(\beta)} \mathbf{n}_{(\beta)}, \tag{13. 7}$$

здесь $\Omega_{(\alpha)}^{\cdot(\beta)}$ — скалярная матрица, она не образует в таком виде геометрического объекта, так как для нее не определен закон преобразования. Таким образом, аффинор выступает сейчас как матрица, которая, действуя на номера реперных векторов, преобразует репер. Следовательно, аффинор действует на вектор не непосредственно, а через преобразование репера.

Если реперы $\{O, \mathbf{n}_{(\alpha)}\}$ и $\{O, \mathbf{n}'_{(\alpha)}\}$ нам заданы, то можно однозначно определить матрицы прямого и обратного преобразования

$$\mathbf{n}'_{(\alpha)} = \Omega_{(\alpha)}^{\cdot(\beta)} \mathbf{n}_{(\beta)}, \qquad \mathbf{n}_{(\beta)} = \Omega^{(\alpha)}_{\cdot(\beta)} \mathbf{n}'_{(\alpha)}. \tag{13. 8}$$

Используя эти равенства, легко установить обычные соотношения между компонентами матриц

$$\Omega_{(\alpha)}^{\cdot(\varepsilon)} \Omega^{\beta}_{\cdot(\varepsilon)} = \Omega^{(\varepsilon)}_{\cdot(\alpha)} \Omega_{(\varepsilon)}^{\cdot(\beta)} = \delta^{\beta}_{\alpha}. \tag{13. 9}$$

Далее, введем взаимные реперы $\{O,\ \mathbf{n}^{(\alpha)}\}$ и $\{O,\ \mathbf{n}'^{(\alpha)}\}$, т. е. такие, векторы которых удовлетворяют следующим соотношениям (ср. (12. 2)):

$$\mathbf{n}_{(\alpha)} \cdot \mathbf{n}^{(\beta)} = \mathbf{n}'_{(\alpha)} \cdot \mathbf{n}'^{(\beta)} = \delta^{\beta}_{\alpha}; \tag{13. 10}$$

тогда, умножая равенства (13. 8) на $\mathbf{n}^{(\varepsilon)}$ и $\mathbf{n}'^{(\varepsilon)}$ соответственно, найдем компоненты матриц

$$\Omega^{\cdot(\beta)}_{(\alpha)} = \mathbf{n}'_{(\alpha)} \cdot \mathbf{n}^{(\beta)}, \quad \Omega^{(\alpha)}_{\cdot(\beta)} = \mathbf{n}'^{(\alpha)} \cdot \mathbf{n}_{(\beta)} \tag{13. 11}$$

прямого и обратного преобразований. Легко проверить, что соотношения (13. 9), вследствие (13. 10), имеют место.

Итак, мы получили следующие результаты:

1. Аффинор Ω, действуя на исходный репер (или реперное поле), преобразует его в новый репер (или реперное поле)

$$\{O,\ \mathbf{n}_{(\alpha)}\} \to \{O,\ \mathbf{n}'_{(\alpha)}\}, \qquad \mathbf{n}'_{(\alpha)} = \Omega^{\cdot(\beta)}_{(\alpha)} \mathbf{n}_{(\beta)}. \tag{13. 12}$$

2. В результате действия аффинора на векторное поле $\mathbf{A}$ оно переходит в новое поле $\mathbf{A}'$, при этом векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ разлагаются каждый в своем репере с одними и теми же коэффициентами

$$\mathbf{A} = A^{(\alpha)} \mathbf{n}_{(\alpha)}, \qquad \mathbf{A}' = A^{(\alpha)} \mathbf{n}'_{(\alpha)};$$

именно поэтому каждый вектор A перейдет в совершенно новый вектор $\mathbf{A}'$.

3. Новый вектор $\mathbf{A}'$ можно отнести к исходному реперу $\{O,\ \mathbf{n}_{(\alpha)}\}$, тогда его компоненты определятся следующим образом:

$$\mathbf{A}' = \tilde{A}^{(\alpha)} \mathbf{n}_{(\alpha)}, \qquad \tilde{A}^{(\alpha)} = \Omega^{\cdot(\alpha)}_{(\beta)} A^{(\beta)}. \tag{13. 12a}$$

Рассмотрим теперь такую задачу: пусть аффинор Ω преобразует поле реперов согласно (13. 12); требуется выяснить, как следует преобразовывать при этом компоненты любого вектора $\mathbf{A}$, чтобы вектор остался неизменным?

Мы имеем

$$\mathbf{A} = A^{(\sigma)} \mathbf{n}_{(\sigma)}, \qquad \mathbf{n}'_{(\sigma)} = \Omega^{\cdot(\sigma)}_{(\alpha)} \mathbf{n}_{(\sigma)}, \qquad \mathbf{n}_{(\sigma)} = \Omega^{(\alpha)}_{\cdot(\sigma)} \mathbf{n}'_{(\alpha)},$$

подставляя последнее равенство в первое, получим

$$\mathbf{A} = A'^{(\alpha)} \mathbf{n}'_{(\alpha)}, \qquad A'^{(\alpha)} = \Omega^{(\alpha)}_{\cdot(\sigma)} A^{(\sigma)}. \tag{13. 13}$$

Таким образом, если мы вслед за преобразованием реперов (13. 12) подвергнем преобразованию (13. 13) компоненты векторов, отнесенных к первоначальному реперу, то векторное поле останется неизменным.

Легко видеть, что такая задача решается всякий раз, как только мы переходим от одного координатного репера к другому. На этом и основано преобразование координатных реперов и координат, при которых все векторы и векторные соотношения остаются инвариантными.

Векторы координатного репера, иногда называемые масштабными, для отличия обозначают специальными буквами; номера координатных векторов так же, как и номера соответствующих компонент, обычно в скобки не заключают, например $\mathbf{e}_a$, $\mathbf{e}_\mu$, A^a, A^μ, $\mathbf{n}_a$, при этом номер вектора и номер соответствующей компоненты разлагаемого вектора всегда совпадают. Точно так же оба индекса аффинора, преобразующего координатный репер, в скобки не заключают, часто обозначают одной и той же буквой, различая штрихом, например $\omega^a_{a'}$, $\omega^\mu_{\mu'}$. Если эти компоненты не постоянные и не являются производными, то мы имеем неголономные преобразования. Если же $\omega^{a'}_a = \mathrm{const}$, $\omega^\mu_{\mu'} = \partial x^\mu / \partial x^{\mu'}$, $\omega^{\mu'}_\mu = \partial x^{\mu'} / \partial x^\mu$, то имеем обычные голономные преобразования координат и координатных реперов.

Не следует думать, что координатные реперы $\{O, \mathbf{e}_\mu\}$, в отличие от инвариантных $\{O, \mathbf{n}_{(\alpha)}\}$, есть какие-то несущественные реперы второго сорта, поскольку их преобразование не сказывается на векторных полях. С геометрической точки зрения, все они имеют одинаковую природу, но только за координатными реперами закреплены путем соглашения особые обязанности — быть всегда связанными с координатной сеткой и преобразовываться вместе с ней. Инвариантные реперы отличаются только тем, что на них это соглашение не распространяется. Именно поэтому они и инвариантные.

Операция аффинор ковариантна относительно обеих групп преобразований (A) и (B), как это видно из ее определения. Если матрица $\Omega^{\cdot(\beta)}_{(\alpha)}$ постоянна (компоненты ее не зависят от координат), аффинор преобразует, например, однородное векторное поле в новое поле, но тоже однородное. Если аффинор Ω локальный, т. е. зависит от координат, то такой аффинор преобразует однородное векторное поле в неоднородное. Сам аффинор представляет собой тоже некоторое аффинорное поле.

До сих пор мы рассматривали свойства аффинора, не пользуясь ни координатной сеткой, ни координатным репером, т. е. в инвариантной форме. Введем теперь поле координатных реперов $\{O, \mathbf{e}_\mu\}$, принадлежащих координатной системе x^μ, тогда векторы инвариантных реперов можно разложить по векторам локального координатного репера; мы получим

$$\mathbf{n}_{(\alpha)} = n^\mu_{(\alpha)} \mathbf{e}_\mu, \qquad \mathbf{n}'_{(\alpha)} = \tilde{n}^\mu_{(\alpha)} \mathbf{e}_\mu$$

и также

$$\mathbf{A} = A^\mu \mathbf{e}_\mu, \qquad \mathbf{A}' = \tilde{A}^\mu \mathbf{e}_\mu.$$

После этого соотношения (13. 5) и (13. 6) дают

$$A^\mu = A^{(\alpha)} n^\mu_{(\alpha)}, \qquad \tilde{A}^\mu = A^{(\alpha)} \tilde{n}^\mu_{(\alpha)}. \tag{13.14}$$

Определяя A^α из первого равенства и вставляя во второе, получим

$$\tilde{A}^\mu = (\tilde{n}^\mu_{(\alpha)} n^{(\alpha)}_\sigma) A^\sigma \equiv \Omega^{\cdot\mu}_\sigma A^\sigma. \tag{13.15}$$

Следовательно, аффинор (13. 15) также преобразует вектор **A** в **A**$'$, но при этом преобразует компоненты векторов, отнесенные к произвольному координатному реперу. Найденные таким путем аффиноры

$$\Omega_{\sigma}^{\cdot\mu} = \tilde{n}^{\mu}_{(\alpha)} n^{(\alpha)}_{\sigma}, \qquad \Omega^{\sigma}_{\cdot\mu} = \tilde{n}^{(\alpha)}_{\mu} n^{\sigma}_{(\alpha)} \tag{13. 16}$$

также преобразуют реперные векторы друг в друга

$$\Omega_{\sigma}^{\cdot\mu} n^{\sigma}_{(\alpha)} = \tilde{n}^{\mu}_{(\lambda)} n^{(\lambda)}_{\sigma} n^{\sigma}_{(\alpha)} = \tilde{n}^{\mu}_{(\lambda)} \delta^{\lambda}_{\alpha} = \tilde{n}^{\mu}_{(\alpha)}; \tag{13. 17}$$

аналогично

$$\Omega^{\sigma}_{\cdot\mu} \tilde{n}^{\mu}_{(\alpha)} = n^{\sigma}_{(\alpha)}. \tag{13. 18}$$

Аффиноры (13. 16), очевидно, представляют собой общековариантные тензоры второго ранга. Сравнивая аффиноры, выраженные через проекции реперных векторов

$$\Omega_{(\alpha)}^{\cdot(\varepsilon)} = \tilde{n}^{\sigma}_{(\alpha)} n^{(\varepsilon)}_{\sigma}, \qquad \Omega^{(\varepsilon)}_{\cdot(\alpha)} = \tilde{n}^{(\varepsilon)}_{\sigma} n^{\sigma}_{(\alpha)}, \tag{13. 19}$$

с аффинорами (13. 16), установим связь между ними [1]

$$\Omega_{\mu}^{\cdot\sigma} = \Omega_{(\alpha)}^{\cdot(\varepsilon)} n^{(\alpha)}_{\mu} n^{\sigma}_{(\varepsilon)}, \qquad \Omega^{\mu}_{\cdot\sigma} = \Omega^{(\alpha)}_{\cdot(\varepsilon)} n^{\mu}_{(\alpha)} n^{(\varepsilon)}_{\sigma}. \tag{13. 20}$$

Нетрудно показать, что тензор второго ранга всегда можно истолковать как некоторый аффинор. Пусть задан тензор $B_{\mu}^{\cdot\nu}$, обладающий следующими свойствами:

$$B_{\mu\nu} \neq B_{\nu\mu}, \qquad \mathrm{Det}\,|B_{\mu\nu}| \neq 0.$$

Выберем какой-либо инвариантный репер $\{O,\ \mathbf{n}_{(\alpha)}\}$; тогда, свертывая $B_{\mu}^{\cdot\nu}$ с компонентами $n^{(\alpha)}_{\nu}$ реперных векторов, мы получим новый набор линейно-независимых векторов

$$\tilde{n}^{(\alpha)}_{\mu} = B_{\mu}^{\cdot\nu} n^{(\alpha)}_{\nu}, \tag{13. 21}$$

которые, следовательно, также образуют репер $\{O,\ \mathbf{n}'_{(\alpha)}\}$. Векторы этого репера, вообще говоря, и не единичны, и не ортогональны. Свертывая (13. 21) с $n^{\nu}_{(\alpha)}$, находим

$$B_{\mu}^{\cdot\nu} = \tilde{n}^{(\alpha)}_{\mu} n^{\nu}_{(\alpha)}, \tag{13. 22}$$

что и требовалось показать.

В случае, если тензор $B_{\mu\nu}$ симметричен, то, как легко убедиться, выражая $B_{\mu\nu}$ через собственные векторы и собственные значения, его снова можно представить в виде (13. 22), при этом оба репера $\{O,\ \mathbf{n}_{(\alpha)}\}$ и $\{O,\ \mathbf{n}'_{(\alpha)}\}$ будут ортогональными, но векторы одного из них будут, в общем случае, не единичными.

Теперь мы можем переосмыслить целый ряд соотношений, которыми ранее пользовались. Так, например, аффинор (13. 2), как мы уже говорили, описывает преобразование координатных реперов.

---

[1] Тот же результат получим, если вместо векторов $n^{\sigma}_{(\alpha)}$ возьмем $\tilde{n}^{\sigma}_{(\alpha)}$.

В случае (1. 15) имеем

$$\Omega_{(\alpha)}^{\cdot(\beta)} \to \omega_{a'}^{a}, \tag{13. 23}$$

т. е. аффинор представлен компонентами ортогонального преобразования. В случаях (6. 11) и (6. 12) компонентами аффинора являются коэффициенты Ламэ.

Приведем еще два простейших примера аффинора. Так, аффинор тождественного преобразования имеет вид

$$\Omega_{\cdot\nu}^{\mu} = \Omega_{\nu}^{\cdot\mu} = \delta_{\nu}^{\mu}. \tag{13.24}$$

Аффинор конформного преобразования запишется как

$$\Omega_{\mu}^{\cdot\sigma} = e^{\varphi}\delta_{\mu}^{\sigma}, \qquad \Omega_{\cdot\sigma}^{\mu} = e^{-\varphi}\delta_{\sigma}^{\mu}. \tag{13. 25}$$

Действительно, применяя аффинор (13. 25) к метрическому тензору, находим

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\sigma\lambda}\Omega_{\mu}^{\cdot\sigma}\Omega_{\nu}^{\cdot\lambda} = e^{2\varphi}g_{\mu\nu}. \tag{13. 26}$$

Можно заметить, что аффинор (13. 25) в каждой точке задает изотропное растяжение (или сжатие). Ниже мы увидим, что аффиноры существенным образом связаны с описанием систем отсчета.

Глава II

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А. МЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

В этой части мы кратко рассмотрим ОТО в ее обычной формулировке, когда исходным геометрическим объектом является метрический тензор. Поэтому такую формулировку теории условно будем называть метрической.

14. Физические принципы

Наиболее просто физические принципы ОТО можно изложить, опираясь на принцип локальной эквивалентности, хотя некоторые авторы и возражают против такого подхода [6]. Нам кажется, что возражения подобного рода относятся, в основном, к методике изложения, которая в немалой степени зависит от вкусов автора. Мы считаем, что именно принцип локальной эквивалентности проще всего подводит читателя к такому необычному свойству, как кривизна пространства-времени.

Замечательным свойством гравитационного поля, установленным еще Галилеем, является равенство ускорений всех тел, движущихся в одинаковом поле тяготения. Это значит, что выраженные в одних и тех же единицах инертная и гравитационная массы тела равны. Этот фундаментальный факт, установленный в настоящее время с точностью до 10^{-11}, является первым постулатом теории тяготения.

Равенство ускорений всех тел в одинаковом поле тяготения делает движение в последнем аналогичным движению относительно неинерциальной системы отсчета (НСО). Действия сил инерции и тяготения подобны: те и другие пропорциональны массе тела. Аналогия эта настолько велика, что локально действия тяготения и сил инерции неразличимы. Этот факт носит название принципа локальной эквивалентности. Локально равноправны два утверждения: а) в инерциальной системе отсчета имеется поле тяготения, б) поля тяготения нет, но система отсчета неинерциальная. Следовательно, при наличии гравитационного поля законы природы должны быть ковариантны не только относительно выбора инерциальной системы отсчета (ИСО), как это имеет место в СТО, но и относительно выбора неинерциальной системы отсчета. Более того, так как НСО не обязательно связана с гравитацион-

ным полем (неинерциальное движение системы отсчета может быть обусловлено и другими силовыми полями), то и без гравитационного поля законы природы должны быть ковариантны относительно выбора НСО.

Переход к какой-либо НСО, т. е. к системе отсчета, движущейся непрямолинейно и неравномерно, всегда связан с переходом к некоторой криволинейной системе координат (обратное утверждение неверно), тогда допустимость любых систем отсчета, по Эйнштейну, аналитически должна выражаться требованием общековариантности уравнений поля. Уравнения гравитационного и других полей должны сохранять свой вид в любой криволинейной системе координат.

Однако общековариантная форма какого-либо закона еще не говорит о присутствии в описываемой системе гравитационного поля. Это могло бы иметь место в случае полной тождественности гравитации и инерции, да и то не всегда.

Мировая линия в специальной теории относительности (СТО), описывающая историю движения материальной точки, является инвариантным построением, не зависящим от выбора ИСО. Но смысл мировой линии также не изменится, если мы перейдем от галилеевой системы координат к любой криволинейной.

Элемент длины мировой линии, который в галилеевой системе координат записывается как

$$ds^2 = \eta_{ab} dX^a dX^b, \qquad a, b = 0, 1, 2, 3, \qquad X^0 = ct, \tag{14.1}$$

при переходе к произвольной системе координат x^μ, связанной с галилеевыми координатами X^a формулами преобразования (7. 1), примет более общую форму

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{14.2}$$

где компоненты метрического тензора имеют специальный вид

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \frac{\partial X^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^b}{\partial x^\nu}. \tag{14.3}$$

Так как переход к НСО всегда связан, как мы уже отмечали, с переходом к некоторой криволинейной системе координат, то метрический тензор $g_{\mu\nu}$, зависящий от всех четырех координат, должен содержать, согласно ортодоксальной точке зрения, кроме чисто геометрической информации — о характере системы координат, также физическую — о силах инерции (например, о центробежных силах, силах Кориолиса и т. д.). Тогда второй постулат теории тяготения можно сформулировать следующим образом: ввиду того, что поля сил инерции и тяготения локально неразличимы, информация о гравитационном поле так же, как и о силах инерции, должна содержаться в метрическом тензоре, который в теории тяготения играет роль потенциала.

Если гравитационного поля нет, то компоненты потенциала имеют специальный вид (14. 3), позволяющий обратно перейти

к выражению (14. 1) для интервала, т. е. от НСО перейти к ИСО и ликвидировать тем самым силы инерции во всем пространстве.

В присутствии поля тяготения компоненты потенциала теряют свой специальный вид и тогда никакими преобразованиями координат выражение (14. 2) нельзя свести во всем пространстве к выражению (14. 1) — невозможно ввести единую галилееву систему координат, т. е. ИСО. Геометрически это означает, что пространство перестало быть плоским. Таким образом, мы приходим к решающему для теории тяготения выводу — пространство, в котором есть гравитационное поле, уже не плоское. Тяготение проявляется в искривлении пространства, и этим гравитационное поле резко отличается от всех остальных.

Рассмотрим теперь математическую схему ОТО, аналитически выражающую физические принципы, которые мы только что изложили.

15. Уравнения гравитационного поля

Интеграл действия, с написания которого начинается построение любой полевой теории, должен быть записан, очевидно, в общековариантной форме

$$I = \int \sqrt{-g}\, L d\Omega. \tag{15. 1}$$

Функция Лагранжа, построенная из всех силовых полей и величин, характеризующих распределение и движение вещества описываемой физической системы, представляет собой, как обычно, инвариант. Разобьем ее на два слагаемых:

$$L = L_g + L_m. \tag{15. 2}$$

Здесь L_m — лагранжиан той физической системы, которая является источником гравитационного поля, ее мы конкретизировать не будем; отметим лишь, что в нее входят все поля и характеристики распределения и движения масс, порождающие гравитационное поле; L_g — лагранжиан гравитационного поля, построенный только из гравитационного потенциала $g_{\mu\nu}$ и его производных.

Лагранжианы обычно удовлетворяют следующим требованиям: во-первых, это простейшие скаляры, построенные из соответствующих потенциалов и их производных; во-вторых, во все лагранжианы входят производные от потенциалов не выше первого порядка [1]. Лагранжиан гравитационного поля должен быть простей-

---

[1] Разумеется, конкретный вид функции Лагранжа нельзя построить, исходя только из соображений инвариантности. В геометрии в ОТО и СТО не существует правил или аксиом для написания лагранжиана данной группы явлений. Лагранжиан, в сущности, есть концентрированное выражение всех опытных фактов, которые известны и еще, может быть, неизвестны в данной области явлений.

шим скаляром, построенным из $g_{\mu\nu}$ и его производных, характеризующим кривизну пространства-времени. Таким скаляром является R — скалярная кривизна пространства, но она не удовлетворяет второму требованию — содержит вторые производные. Однако они входят в R линейно и могут быть свернуты в виде обычной нековариантной дивергенции [9]

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}\,G + \partial_\sigma W^\sigma, \tag{15.3}$$

где

$$G = g^{\mu\nu}\left\{\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\right\}. \tag{15.4}$$

Каждое из слагаемых в (15. 3) является скаляром только относительно линейных преобразований, и лишь в сумме они образуют общековариантный скаляр.

Выражения типа дивергенции, стоящие в интеграле действия, не оказывают влияния на уравнения поля, получаемые варьированием по потенциалам. Поэтому, казалось бы, в качестве L_g можно выбрать

$$L_g = \mathrm{const}\cdot G, \tag{15.5}$$

тогда будет удовлетворено второе требование, но, к сожалению, нарушено первое. Тем не менее, выражение (15. 5) принято в ОТО в качестве лагранжиана. Уравнения гравитационного поля при этом получаются общековариантными, так как для вывода их безразлично, какое выражение варьировать — (15. 3) или (15. 4).

Некоторые полагают, что лучше нарушить второе требование и использовать в качестве лагранжиана истинный скаляр R, справедливо считая, что во всяком случае минимальное требование — общековариантность — должно быть соблюдено.

Отметим, что вне зависимости от того, какое выражение R или G взять в качестве исходного, трудности, о которых речь будет ниже, не исчезают.

Итак, в качестве лагранжиана гравитационного поля примем выражение

$$L_g = \frac{c^4}{16\pi\varkappa}G, \tag{15.6}$$

тогда, варьируя интеграл действия (15. 1) по $g_{\mu\nu}$, получаем эйнштейновские уравнения поля

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi\varkappa}{c^4}\,T_{\mu\nu}, \tag{15.7}$$

которые аналитически выражают основную идею ОТО: распределение и движение всех видов вещества и полей ($T_{\mu\nu}$) вызывают искривление пространства. Воспользовавшись произвольными преобразованиями координат, четырем из десяти компонент $g_{\mu\nu}$ можно придать любые значения; следовательно, из десяти уравнений Эйнштейна только шесть являются независимыми. Добав-

ляя сюда еще уравнения состояния вещества, например зависимость плотности массы от давления, мы найдем гравитационное поле, распределение и движение масс, порождающих его.

Из (15. 7) как следствие вытекает закон сохранения энергии-импульса источников гравитационного поля

$$\nabla_\sigma T^\sigma_\mu = 0. \tag{15.8}$$

В этом легко убедиться, воспользовавшись свернутыми тождествами Бианки (4. 13). Таким образом, закон (15. 8) можно считать содержащимся в уравнениях поля подобно тому, как закон сохранения электричества содержится в уравнениях электромагнитного поля. Однако в отличие от электродинамики, уравнения Эйнштейна содержат также и уравнения движения источников. Это обусловлено двумя причинами. Во-первых, ввиду нелинейности уравнений поля (15. 7), принцип суперпозиции здесь не имеет места, поэтому, например, два сингулярных источника, в силу уравнений Эйнштейна, не могут находиться в покое. Закон движения их, очевидно, можно найти из требования, чтобы их поле (не равное, конечно, сумме полей) удовлетворяло уравнениям Эйнштейна. Вторая, так сказать, динамическая причина связана с тем, что в уравнения гравитационного поля входит тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$. Закон (15. 8), описывающий, в частности, изменение импульса вещества под действием поля тяготения, и представляет собой, очевидно, закон движения масс в дифференциальной форме.

В случае электродинамики в уравнения Максвелла не входят величины, характеризующие распределение и движение вещества, — члены с плотностью массы и количества движения, а поэтому здесь нет закона (15. 8). Вместо него существует закон сохранения электричества

$$\nabla_\sigma j^\sigma = 0, \qquad j^\sigma = \tilde{\rho} u^\sigma. \tag{15.9}$$

Чтобы пояснить это обстоятельство, рассмотрим простейший пример. Пусть в гравитационном поле движется пыль достаточно малой плотности, поэтому гравитационным полем, порожденным этой пылью, можно пренебречь [1]. Тензор энергии-импульса этого пылевидного облака имеет, как известно, вид

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu, \qquad u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \tag{15.10}$$

где ρ — инвариантная плотность пыли. Наличие гравитационного поля учитывается тем, что $T^{\mu\nu}$ задан в искривленном пространстве. Подставим (15. 10) в (15. 8)

$$\nabla_\sigma T^{\mu\sigma} = u^\mu \nabla_\sigma (\rho u^\sigma) + \rho u^\sigma \nabla_\sigma u^\mu = 0;$$

---

[1] Точно так же и взаимодействием между пылинками мы пренебрегаем.

умножая на u_μ и учитывая, что $u_\mu \nabla_\sigma u^\mu = 0$, находим

$$\nabla_\sigma (\rho u^\sigma) = 0, \qquad u^\sigma \nabla_\sigma u^\mu = \frac{Du^\mu}{ds} = 0. \tag{15. 11}$$

Первое из этих равенств есть закон сохранения массы, аналог (15. 9), второе — уравнение геодезической линии. В плоском пространстве ей соответствовала бы прямая линия и, следовательно, инерциальное движение. В искривленном пространстве, т. е. при наличии гравитационного поля, закон инерции выглядит, очевидно, так:

$$\frac{Du^\mu}{ds} = 0. \tag{15. 12}$$

Таким образом, в отсутствие сил негравитационного происхождения тело имеет ковариантное ускорение, равное нулю, т. е. движется по геодезической.

В общем случае трудная задача получения приближенных уравнений движения из уравнений поля была выполнена Эйнштейном, Инфельдом, Гофманом и Фоком с сотрудниками.

В настоящее время известно много точных решений уравнений Эйнштейна, среди них важнейшим (в смысле возможности экспериментальной проверки) является решение Шварцшильда — статическое, центрально-симметричное гравитационное поле, порожденное точечной массой. Выражение для интервала в этом случае имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2r_0}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2r_0/r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad r_0 = \frac{\varkappa m}{c^2}. \tag{15. 13}$$

Эта метрика с помощью уравнения геодезической (15. 12) позволяет описать три известных эффекта ОТО:

1. Вращение перигелия Меркурия, которое в столетие составляет примерно 5600″. После вычета кинематической поправки, равной 5026″, остаток в 575″ представляет динамический эффект, т. е. возмущающее действие остальных планет плюс общерелятивистский эффект.

После учета возмущающего действия планет остается еще $(42{,}9 \pm 0{,}2)''$ в столетие, которые не могут быть объяснены ньютоновой теорией тяготения.

Согласно СТО, смещение перигелия за один оборот будет $\Delta\varphi = \pi\varkappa M/Rc^2$; согласно ОТО, $\Delta\varphi = 6\pi\varkappa M/Rc^2$, т. е. в шесть раз больше и дает $\Delta\varphi \approx 43{,}03''$ в столетие. Мы видим, что согласие вполне удовлетворительное. Здесь M — масса Солнца, R — радиус орбиты Меркурия.

2. Отклонение лучей света в поле тяготения Солнца. В этом случае теория Ньютона и СТО в первом приближении дают совпадающие результаты $\Delta\varphi = 2\varkappa M/R_0c^2$, в то время как ОТО дает

$\Delta\varphi=4\varkappa M/R_0c^2$, т. е. вдвое больший результат (R_0 — радиус Солнца). Численное значение, согласно ОТО, оказывается равным $\Delta\varphi=1{,}75''$. Экспериментальные данные здесь менее точны вследствие различных не поддающихся учету систематических ошибок. Результат в среднем на 20% превышает теоретический [1].

3. Гравитационное красное смещение спектральных линий. Теория Ньютона, СТО и ОТО дают в первом приближении одинаковые результаты

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=-\frac{\varkappa M}{R_0c^2}=-2{,}12\cdot 10^{-6}.$$

Экспериментальные данные здесь еще менее надежны, однако использование эффекта Мессбауэра, а также измерение сдвига линии поглощения D_1 натрия в фотосфере Солнца дали $1{,}05\pm0{,}05$ теоретически предсказанного значения.

В настоящее время происходит переоценка экспериментальных результатов в связи с разработкой более совершенных методов наблюдений. Уточняется масса Венеры, наиболее сильно возмущающая движение Меркурия, стремятся установить величину сплюснутости Солнца, уточнить расстояния и т. д. Все это может повлиять на величину вековых эффектов.

16. Законы сохранения и псевдотензор энергии-импульса

В любой физической системе будет происходить обмен энергией и импульсом между этой системой и гравитационным полем, которое всегда в ней присутствует. Этот факт и описывается уравнением (15. 8). Переписав его в виде

$$\partial_\sigma\left\{\sqrt{-g}\,T^{\mu\sigma}\right\}=-\sqrt{-g}\,\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}T^{\sigma\lambda}, \tag{16.1}$$

мы получаем, собственно говоря, не закон сохранения, а закон изменения энергии и импульса системы, обусловленного ее взаимодействием с гравитационным полем. Сохраняться будут лишь полные энергия и импульс системы тел и гравитационного поля

$$\partial_\sigma\left\{\sqrt{-g}\,\Theta^{\mu\sigma}\right\}=0, \tag{16.2}$$

где

$$\Theta^{\mu\sigma}=T^{\mu\sigma}+t^{\mu\sigma}. \tag{16.3}$$

Однако величина $t^{\mu\sigma}$, учитывающая энергию и импульс гравитационного поля, не является общековариантным тензором, она преобразуется как тензор только при линейных преобразованиях и называется псевдотензором. Поэтому и сумма (16. 3) также не является тензором и называется иногда комплексом плотности полной энергии и импульса системы.

[1] В последнее время, используя вместо оптического радиоизлучение звезд, точность измерений удалось значительно повысить.

Обычно величину $\sqrt{-g}\,\Theta^{\mu\sigma}$ представляют с помощью вспомогательного выражения (суперпотенциала) следующим образом:

$$\sqrt{-g}\,\Theta_{\mu}^{\sigma}=\partial_{\lambda}\Psi_{\mu}^{[\sigma\lambda]}, \tag{16.4}$$

где в векторные скобки заключены антисимметричные индексы; тогда закон сохранения выполняется тождественно

$$\partial_{\sigma}\left\{\sqrt{-g}\,\Theta_{\mu}^{\sigma}\right\}=\partial_{\sigma}\partial_{\lambda}\Psi_{\mu}^{[\sigma\lambda]}\equiv 0. \tag{16.5}$$

Так, например, для комплекса, данного Эйнштейном, суперпотенциал имеет вид

$$\Psi_{\mu}^{[\sigma\lambda]}=\frac{1}{2\varkappa\sqrt{-g}}\,g_{\mu\nu}\partial_{\tau}\left\{(-g)\left(g^{\sigma\nu}g^{\lambda\tau}-g^{\lambda\nu}g^{\sigma\tau}\right)\right\}. \tag{16.6}$$

В комплексе Меллера [7] соответствующий суперпотенциал записан так:

$$\Psi_{\mu}^{[\sigma\lambda]}=\frac{1}{\varkappa}\sqrt{-g}\,g^{\sigma\tau}g^{\lambda\nu}\left\{\partial_{\tau}g_{\mu\nu}-\partial_{\nu}g_{\mu\tau}\right\}. \tag{16.7}$$

В работе [8] были получены аналогичные результаты. С помощью этих суперпотенциалов получаются несимметричные выражения для $\Theta_{\mu\nu}$. Однако компоненты Θ_{0}^{σ}, найденные с помощью (16. 7), ведут себя как вектор при произвольных чисто пространственных, не затрагивающих времени, преобразованиях координат. Поэтому при вычислении энергии и импульса в некотором конечном объеме можно пользоваться любой пространственной системой координат.

Для $\Theta^{\mu\nu}$ имеется также симметричное выражение

$$-g\tilde{\Theta}^{\mu\nu}=\partial_{\lambda}\tilde{\Psi}^{\mu[\nu\lambda]}, \tag{16.8}$$

где

$$\tilde{\Psi}^{\mu[\nu\lambda]}=\frac{c^{4}}{16\pi\varkappa}\,\partial_{\sigma}\left\{(-g)\left(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}-g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\right)\right\}. \tag{16.9}$$

которое позволяет построить сохраняющийся псевдотензор момента [9]. Но теперь (16. 8) не является даже аффинной тензорной плотностью, так как содержит дополнительный множитель $\sqrt{-g}$. Тензорные свойства (16. 8) имеют место только при линейных ортогональных преобразованиях. Разумеется, при подсчете энергии и импульса ограниченной в пространстве замкнутой системы все выражения дают один и тот же результат. В частности, воспользовавшись полем Шварцшильда, найдем

$$\int\sqrt{-g}\,\Theta_{0}^{0}dV=\int\left\{-g\tilde{\Theta}_{0}^{0}\right\}dV=mc^{2}, \tag{16.10}$$

при этом для случаев (16. 6) и (16. 9) результат (16. 10) получится только тогда, когда система координат на бесконечности (пространственной) дает для $g_{\mu\nu}$ их галилеевы значения.

Отмеченная здесь нетензорность величины $t^{\mu\nu}$ и, следовательно, $\Theta^{\mu\nu}$ приводит к серьезным трудностям, которые до сих пор еще не преодолены [19].

Б. ТЕТРАДНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Формализм ортогональных реперов позволяет представить все соотношения теории тяготения в виде, не зависящем от случайного выбора системы координат, т. е. в общековариантной форме. В этом, несомненно, есть некоторое преимущество этого метода.

Локальная тетрада всегда может быть интерпретирована как локальная лоренцева система; следовательно, геометрические объекты ОТО, будучи отнесенными к ней, приобретают метрический и в некоторых случаях физический смысл, т. е. в принципе могут быть измерены в подходящем эксперименте.

При специальном выборе поля тетрад теория тяготения может быть представлена в форме, повторяющей многие соотношения электродинамики. Разумеется, достижение такой аналогии не является самоцелью или способом доказательства чего-либо, но такая аналогия, как показывают исследования многих авторов, особенно вопросов гравитационного излучения, имеет большую эвристическую ценность, помогая осмыслить аппарат ОТО.

При переходе к тетрадной формулировке все трудности теории, будучи перенесенными из точечного многообразия в многообразие ортогональных реперов и выраженные с помощью геометрических объектов, имеющих метрический смысл, более отчетливо обнаруживают свое происхождение, а это позволяет с бóльшим знанием дела подойти к решению основных проблем.

Следует также отметить, что тетрадная формулировка ОТО не совсем эквивалентна метрической. Разница, примерно, аналогична той, которая имеет место при формулировке квантовой механики скалярных и спинорных полей. Исходным объектом метрической формулировки ОТО является метрический тензор, который ведет себя как скаляр относительно группы (B). Но группа (B) — локальных лоренцевых вращений — связана со спиновыми (поляризационными) свойствами любого поля, поэтому в тетрадной формулировке ОТО, где группа (B) является весьма существенной, можно общековариантным образом описать поляризационные свойства гравитационного поля. Это обстоятельство находит свое отражение при записи уравнения Дирака в гравитационном поле [20], где коэффициенты Ламэ выступают как потенциалы гравитационного поля, естественным образом включая взаимодействие гравитационного поля со спином. Все это также говорит в пользу тетрадной формулировки ОТО как необходимому промежуточному этапу на пути преодоления трудностей теории.

Имеется несколько вариантов тетрадной формулировки ОТО, но мы будем придерживаться одного из них, так как нашей главной целью является не обзор тетрадных формулировок, но анализ

трудностей теории, а для этой задачи пригодна, в сущности, любая тетрадная формулировка ОТО.

Тетрадная формулировка ОТО рассматривалась во многих работах [10—18], в монографии [17] читатель найдет солидную библиографию по этим вопросам.

17. Гравитационное поле

При переходе от обычной формулировки ОТО к тетрадной исходные положения теории — равенство инертной и тяжелой массы, принцип локальной эквивалентности — как опытные факты, конечно, сохраняются, однако формализм, отображающий эти факты и их следствия, изменяется. Это связано с тем, что в основу формулировки кладется, как мы говорили, не метрический тензор, а в некотором смысле, более элементарные геометрические объекты — коэффициенты Ламэ. При этом с особенной остротой встают вопросы о том, должно ли в теории гравитационное поле фигурировать явно как некоторая физическая величина, и какой геометрический объект следует принять в качестве напряженности гравитационного поля?

В метрической формулировке ОТО за потенциал принимают иногда метрический тензор, но делают это, в сущности, чисто условно. В оправдание этого можно сказать, что согласно основной идее, реализованной в метрической формулировке ОТО, никакого гравитационного поля и гравитационных сил вообще нет, есть лишь искривленное пространство, искривление которого обусловлено распределением и движением масс, а движение пробной частицы вблизи таких масс — движение по инерции в искривленном пространстве. Это и выражает собой уравнение геодезической линии (15. 12).

Однако формулировка закона сохранения энергии автоматически приводит к псевдотензору гравитационных энергии-импульса, построенному из символов Кристоффеля $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}$, которые играют роль напряженности поля. Уравнение геодезической (15. 12), записанное в виде

$$\frac{du^{\mu}}{ds} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} u^{\sigma} u^{\lambda} = 0, \qquad (17.1)$$

показывает, что символы Кристоффеля, описывающие изменение компонент скорости u^{μ}, снова играют роль напряженности поля. Наконец, сам факт превращения гравитационной энергии в другие виды, связанные с силовыми полями, а также вопросы излучения гравитационных волн указывают на то, что без понятия гравитационного поля в ОТО, по-видимому, не обойтись.

В настоящее время в некоторых исследованиях в качестве напряженности гравитационного поля рассматривается сам тен-

зор кривизны на том основании, что отклонение двух близких геодезических линий описывается уравнением

$$\frac{D^2 l^\mu}{ds^2} + R^{\mu}_{\cdot\sigma\lambda\nu} u^\sigma u^\nu l^\lambda = 0 \tag{17.2}$$

(l^μ — расстояние между двумя геодезическими), которое напоминает релятивистский закон движения материальной точки. С другой стороны, легко видеть, что изменение скорости отклонения будет зависеть, помимо всего прочего, также от неоднородностей гравитационного поля, т. е. будет определяться его градиентами. Это формально следует уже из того, что тензор кривизны содержит вторые производные от $g_{\mu\nu}$ — потенциала гравитационного поля. Кроме того, как увидим ниже, тензор кривизны включает в себя не только сведения о гравитации, но и информацию, не имеющую прямого отношения к гравитационному полю. Поэтому принимать его в качестве компонент гравитационного поля не представляется возможным. Разумеется, и символы Кристоффеля вследствие нетензорности не могут быть непосредственно использованы для этого, так как их можно в заданной точке все обратить, например, в нуль только подходящим выбором координатной сетки, т. е. подходящей нумерацией мировых точек, что для физической величины было бы бессмысленно.

Рассмотрим в качестве наводящего примера закон движения пробного заряда в электродинамике. В галилеевых координатах он имеет вид

$$\frac{du^a}{ds} = F^{a}_{\cdot b} u^b, \tag{17.3}$$

где

$$u^a = \frac{dX^a}{ds}, \qquad F_{ab} = \frac{e}{m_0 c^2}(\partial_a A_b - \partial_b A_a).$$

Уравнение (17. 3) можно записать также следующим образом:

$$\frac{du^a}{ds} = Q^{a}_{c,\cdot b} u^c u^b, \qquad Q_{c,ab} = \frac{1}{2}\{u_c F_{ab} + u_a F_{cb} + u_b F_{ac}\}. \tag{17.4}$$

Любопытно сравнить это с (3. 21), (3. 25)—(3. 27). Сравнение показывает, что движение в электромагнитном поле есть движение по геодезической в пространстве, в котором введена галилеева метрика, с кручением

$$^*C_{ab,c} = \frac{1}{2} u_c F_{ab}. \tag{17.5}$$

Перейдем теперь к произвольной координатной сетке, тогда (17. 4) перепишется так:

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} u^\sigma u^\lambda = -Q^{\mu}_{\sigma,\lambda\cdot} u^\sigma u^\lambda, \tag{17.6}$$

где

$$\bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda} = h^{\mu}_{a}\partial_{\sigma}h^{a}_{\lambda}, \qquad h^{a}_{\lambda} = \frac{\partial X^{a}}{\partial x^{\lambda}}, \qquad Q^{\mu}_{\sigma,\lambda.} = Q^{a}_{c,\,b.}h^{c}_{\sigma}h^{b}_{\lambda}h^{\mu}_{a}.$$

Уравнение (17. 6) можно представить также несколько иначе:

$$\frac{du^{\mu}}{ds} + {}^{*}\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}u^{\sigma}u^{\lambda} = 0; \tag{17.7}$$

при этом мы положили

$${}^{*}\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} = \bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda} + Q^{\mu}_{\sigma,\lambda.}. \tag{17.8}$$

Сравнивая выражения (17. 1) и (17. 7), видим много общего. Коэффициенты связности (17. 8) и символы Кристоффеля формально выполняют одну и ту же роль. Записав символы Кристоффеля, согласно (10. 8),

$$\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} = \bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda} + \gamma^{\mu}_{\sigma,\lambda.}. \tag{17.9}$$

и сравнив (17. 8) и (17. 9), мы убеждаемся, что первые слагаемые, представляющие связность абсолютного параллелизма, порождены произвольным выбором тетрад и в этом смысле их природа одинакова, а вторые слагаемые, представляющие общековариантные тензоры, содержат всю физическую информацию. Именно, величины $Q^{\mu}_{\sigma\lambda.}u^{\sigma}$ описывают поворот 4-вектора скорости u^{μ} пробной частицы при смещении вдоль мировой линии под действием электромагнитного поля. Точно так же и величины $\gamma^{\mu}_{\sigma,\,\lambda.}u^{\sigma}$ описывают поворот 4-вектора скорости пробной частицы при смещении вдоль геодезической, и если существует в природе гравитационное поле, то оно должно быть как-то связано с коэффициентами вращения Риччи $\gamma^{\mu}_{\sigma,\,\lambda..}$

Несмотря на то, что кинематически $Q^{\mu}_{\sigma,\lambda.}$ и $\gamma^{\mu}_{\sigma,\lambda.}$ выполняют одну и ту же задачу, их геометрическая природа весьма различна. Величины $Q^{\mu}_{\sigma,\lambda.}$ есть компоненты общековариантного тензора относительно обеих групп преобразований (A) и (B), т. е. относительно преобразований (7. 7) и (7. 8), в то время как коэффициенты Риччи, содержащие информацию о гравитационном поле, являются тензором только относительно группы (A), но не (B), так как они представляют собой объект связности в неголономной ортогональной системе координат. В этом и состоит одна и, по-видимому, важнейшая из причин появления нековариантных результатов в ОТО.

Законы преобразования этих величин, записанных в локальной тетраде, относительно группы (B) имеют вид

$$\begin{gathered} Q_{a',\,b'c'} = \omega^{a}_{a'}\omega^{b}_{b'}\omega^{c}_{c'}Q_{a,\,bc}, \qquad Q_{a,\,bc} = Q_{\sigma,\,\lambda\mu}h^{\sigma}_{a}h^{\lambda}_{b}h^{\mu}_{c}, \\ \gamma_{\sigma,\,a'b'} = \omega^{a}_{a'}\omega^{b}_{b'}\gamma_{\sigma,\,ab} + \eta_{cd}\frac{\partial\omega^{c}_{a'}}{\partial x^{\sigma}}\omega^{d}_{b'}. \end{gathered} \tag{17.10}$$

Следовательно, только в том случае, когда коэффициенты преобразования $\omega^{a}_{a'}$ постоянные, коэффициенты вращения Риччи преобразуются как тензоры.

Обратимся еще раз к аналогии с электродинамикой и сравним выражения (8. 7) и (17. 4), записанные в мировых индексах

$$\gamma_{\sigma,\lambda\mu} = C_{\lambda\mu,\sigma} + C_{\lambda\sigma,\mu} + C_{\sigma\mu,\lambda},$$
$$Q_{\sigma,\lambda\mu} = \frac{1}{2}\{F_{\lambda\mu}u_\sigma + F_{\lambda\sigma}u_\mu + F_{\sigma\mu}u_\lambda\}. \qquad (17.11)$$

Это сравнение наводит на мысль отождествить объект неголономности

$$C^a_{\mu\nu,\cdot} = \frac{1}{2}\{\partial_\mu h^a_\nu - \partial_\nu h^a_\mu\}, \qquad (17.12)$$

являющийся общековариантным тензором относительно группы (A), с напряженностью гравитационного поля (аналогия с $F_{\mu\nu}$). Тогда, очевидно, четыре вектора h^a_μ, $a=0$, 1, 2, 3, следует рассматривать как потенциалы, а коэффициенты вращения Риччи, которые всегда сопутствуют объекту неголономности, как индукцию гравитационного поля.

Если и окажется в дальнейшем, что такая интерпретация не является единственной, то во всяком случае она вполне естественна как первый шаг на пути осмысливания аппарата ОТО.

18. Выбор поля локальных лоренцевых систем отсчета

Если заданы коэффициенты Ламэ h^a_μ, то, согласно (6. 9), компоненты метрического тензора определятся однозначно

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}h^a_\mu h^b_\nu, \qquad (18.1)$$

обратное утверждение не имеет места, так как десяти уравнений (18. 1) недостаточно для определения шестнадцати функций h^a_μ.

Компоненты (18. 1) метрического тензора $g_{\mu\nu}$ являются скалярами относительно ортогональных преобразований, составляющих группу (B),

$$h^{a'}_\mu = \omega^{a'}_a h^a_\mu, \qquad h^a_\mu = \omega^a_{a'} h^{a'}_\mu, \qquad (18.2)$$

в чем легко убедиться, подставив (18. 2) в (18. 1). Геометрически это связано с тем, что преобразования (18. 2) изменяют относительную ориентацию тетрад $\{O, \mathbf{h}_a\}$, в то время как локальные аффинные реперы $\{O, \mathbf{e}_\mu\}$, с помощью которых в соответствии с (6. 1) определена метрика, остаются неизменными. Поэтому при заданных $g_{\mu\nu}$ коэффициенты h^a_μ определены с точностью до шести произвольных функций, что соответствует числу независимых компонент матрицы ортогонального преобразования.

Для того чтобы коэффициенты Ламэ определить однозначно, необходимы дополнительные условия или, как иногда называют, — калибровка тетрад. Мы примем следующие условия калибровки для потенциалов h^a_μ, напоминающие условия Лоренца в электродинамике:

$$\nabla_\sigma h^\sigma_a = 0, \qquad a = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \qquad (18.3)$$

Так как эти условия общековариантны относительно группы (A), то они не ограничивают выбор координатной сетки, но они нековариантны относительно группы (B) и, следовательно, ограничивают определенным образом выбор поля тетрад.

Условия калибровки (18. 3) обеспечивают непрерывность векторных линий, определяемых полями векторов h_a^μ, т. е. исключают появление фиктивных источников, в которых векторные линии терпят разрыв. В сущности (18. 3) есть условие гладкости координатных линий неголономной системы координат. Условия (18. 3) дают четыре дополнительных соотношения, которых все еще недостаточно для однозначного определения функций h_μ^a, но практически, используя характер симметрии конкретной решаемой задачи, можно сделать определенный выбор для потенциалов h_μ^a.

Калибровка (18. 3) далеко не единственная и, по-видимому, не самая лучшая, но мы будем придерживаться ее потому, что она приводит в рамках ОТО к удивительно простой удовлетворяющей всем обычным требованиям функции Лагранжа для гравитационного поля. Другие возможные калибровки или дополнительные условия рассмотрены в работе [14] и в монографии [17].

После этих замечаний перейдем к рассмотрению следствий принятой калибровки.

Воспользовавшись последним из равенств (8. 11), условие (18. 3) можно записать еще в двух формах

$$C^{\sigma}_{a\sigma,\,\cdot} = 0, \qquad C^{b}_{ab,\,\cdot} = 0. \tag{18. 3a}$$

Если коэффициенты h_a^σ будут голономные, то (18. 3) превращается в известное условие гармоничности для координатной сетки. Действительно, пусть $h_\mu^a = \partial_\mu \varphi^a$, тогда

$$\begin{gathered} \nabla_\sigma h_a^\sigma = \nabla_\sigma \{\eta_{ab} g^{\sigma\mu} h_\mu^b\} = g^{\sigma\mu} \nabla_\sigma \nabla_\mu \varphi_a = 0, \\ \varphi_a = \eta_{ab}\varphi^b, \qquad g^{\sigma\mu}\nabla_\sigma\nabla_\mu\varphi_a = 0, \end{gathered} \tag{18. 4}$$

поэтому условие (18. 3) можно назвать условием гармоничности для неголономных систем координат.

Предположим, что векторные поля h_μ^a не удовлетворяют условиям калибровки. Тогда можно найти такое ортогональное преобразование (18. 2), после которого новые компоненты $h_\mu^{a'}$ уже будут удовлетворять условиям калибровки. При этом функции $\omega_a^{a'}$ должны быть решением системы уравнений, которые следует из (18. 3) и (17. 10),

$$h_a^\sigma \partial_\sigma \omega_{a'}^a + 2C^b_{ab,\,\cdot}\omega_{a'}^a = 0. \tag{18. 5}$$

С другой стороны, если (18. 3) имеет место, то тетрады могут быть подвергнуты еще любому ортогональному преобразованию, не нарушающему условия (18. 3). Коэффициенты этого преобразования должны удовлетворять системе уравнений

$$h_a^\sigma \partial_\sigma \omega_{a'}^a = 0, \tag{18. 6}$$

вытекающей из (18. 5) и (18. 3a).

Теперь мы можем уточнить определение группы преобразований $(\bar{B})$ в тетрадной формулировке ОТО. Группа $(\bar{B})$ есть подгруппа группы (B) — локальных вращений тетрад, оставляющая неизменным условие калибровки.

Если условия калибровки (18. 3) удовлетворены, то имеет место следующее равенство:

$$\nabla_\sigma C^{\sigma}_{ab,\,\cdot} = 0. \qquad (18.\ 7)$$

Действительно, переходя от ортогональных индексов к мировым под знаком производной, находим

$$\nabla_\sigma C^{\sigma}_{ab,\,\cdot} = \frac{1}{\Lambda}\,\partial_\sigma \{\Lambda h^{\mu}_{a} h^{\nu}_{b} h^{\sigma}_{d} C^{d}_{\mu\nu,\,\cdot}\} = \frac{1}{2\Lambda}\,\partial_\sigma \{\Lambda h^{\mu}_{a} h^{\nu}_{b} h^{\sigma}_{d} (\partial_\mu h^{d}_{\nu} - \partial_\nu h^{d}_{\mu})\} =$$

$$= -\frac{1}{2\Lambda}\,\partial_\sigma \{\Lambda (h^{\mu}_{a}\partial_\mu h^{\sigma}_{b} - h^{\mu}_{b}\partial_\mu h^{\sigma}_{a})\} = -\frac{1}{2\Lambda}\,\partial_\sigma \partial_\mu \{\Lambda (h^{\mu}_{a} h^{\sigma}_{b} - h^{\mu}_{b} h^{\sigma}_{a})\} = 0.$$

Рассмотрим свойства бесконечно малого преобразования группы $(\bar{B})$, т. е. ортогонального преобразования, бесконечно мало отличающегося от тождественного

$$\omega^{a}_{b} = \delta^{a}_{b} + \xi^{a}_{\cdot b}, \qquad (18.\ 8)$$

где ξ^{a}_{b} — величины первого порядка малости. В силу условий ортогональности матрица ξ_{ab} антисимметрична

$$\xi_{ab} = -\xi_{ba}. \qquad (18.\ 9)$$

Для того чтобы после преобразования с коэффициентами (18. 8) калибровка сохранялась, необходимо выполнение (18. 6). Тогда бесконечно малые величины (18. 9) должны удовлетворять следующим равенствам:

$$h^{\sigma}_{b} \partial_\sigma \xi^{\cdot b}_{a} = 0, \qquad (18.\ 10)$$

т. е. производные от $\xi^{\cdot b}_{a}$ не независимы.

Воспользовавшись равенствами (18. 3), (18. 9), (18. 10), можно легко показать, что

$$\partial_\mu \{\Lambda \xi^{ab} C^{\mu}_{ab,\,\cdot}\} = 0. \qquad (18.\ 11)$$

Условие калибровки в форме (18. 3а) и равенство (18. 7) позволяют получить ряд простых выражений для тензора Риччи (9. 2), именно:

$$R^{a}_{\mu} = \nabla_\sigma \gamma^{\sigma a}_{\mu,\,\cdot\cdot}, \qquad R^{\mu}_{a} = \nabla_\sigma \gamma^{\mu,\,\sigma\cdot}_{a}. \qquad (18.\ 12)$$

Можно также получить симметричное выражение для тензора Риччи, записав (18. 12) в ортогональных индексах

$$R_{ab} = \nabla_\sigma \{C^{\sigma}_{\cdot a,\,b} + C^{\sigma}_{\cdot b,\,a}\} + \gamma^{d,\,c\cdot}_{a} \gamma_{c,\,db}. \qquad (18.\ 13)$$

Наконец, еще одно полезное для дальнейшего выражение следует из (18. 12)

$$R^{\mu}_{a} = -\nabla_\sigma \gamma^{\mu\sigma}_{a,\,\cdot\cdot} - 2\gamma^{\mu}_{b,\,d\cdot} C^{\cdot d,\,b}_{a}. \qquad (18.\ 14)$$

Как мы уже отмечали, условие калибровки приводит к особенно простому выражению для скалярной кривизны пространства. Действительно, скалярная кривизна в тетрадной записи, согласно (9. 3), имеет следующий вид:

$$R = 4\nabla_\sigma C^{\sigma}_{\cdot a,\cdot}{}^{a} - 4C^{ab,\cdot}_{b} C^{d}_{ad,\cdot} + \gamma_{a,bd}C^{bd,a},$$

но в силу (18. 3а) два первых слагаемых обращаются в нуль, и мы получаем

$$R = \gamma_{a,bd}C^{bd,a}. \tag{18. 15}$$

Легко видеть, что (18. 15) содержит только первые производные от потенциалов h^μ_a и является инвариантом относительно обеих групп преобразований (A) и ($\bar{B}$). Инвариантность относительно группы (A) очевидна, так как коэффициенты вращения Риччи и объект неголономности являются общековариантными тензорами. Если подвергнуть (18. 15) бесконечно малым преобразованиям (18. 8), то мы получим

$$\delta_{\bar{B}}R = \frac{2}{\Lambda}\partial_\sigma\{\Lambda\xi^{ab}C^{\sigma}_{ab,\cdot}\} = 0; \tag{18. 16}$$

здесь обращение в нуль происходит вследствие (18. 11), т. е. R является инвариантом относительно группы ($\bar{B}$).

Таким образом, удается исключить из R вторые производные, не нарушив инвариантности, в то время как в метрической формулировке это сделать невозможно. Отметим также, что и в тетрадной формулировке без калибровки (18. 3) вторые производные из R не исключаются [13]. Если же их насильно отбрасывают так же, как в метрической формулировке ОТО, то оставшаяся часть R общековариантна относительно группы (A), но нековариантна относительно группы (B); ковариантность в этом случае сохраняется только, если коэффициенты ортогонального преобразования $\omega^{a'}_a$ будут постоянные [14].

19. Тетрадные уравнения гравитационного поля

В тетрадной формулировке ОТО в качестве функции Лагранжа гравитационного поля принимается скалярная кривизна пространства в форме (18. 15), которая удовлетворяет всем необходимым требованиям

$$L_g = \frac{c^4}{8\pi\varkappa}\gamma_{a,bd}C^{bd,a}. \tag{19. 1}$$

Константа выбрана так, чтобы в линейном, статическом приближении уравнения поля переходили в уравнение Пуассона. Отметим, что выражение (19. 1) напоминает лагранжиан из электродинамики при наличии среды

$$L = \frac{1}{8\pi}F_{\mu\nu}D^{\mu\nu}. \tag{19. 2}$$

Интеграл действия для гравитационного поля и его источников запишется

$$I=\frac{1}{c}\int\Lambda\{L_g+L_m\}\,d\Omega,\qquad d\Omega=dx^0dx^1dx^2dx^3. \tag{19.3}$$

Функцию L_m мы конкретизировать не будем, для нас сейчас не существенно, какая физическая система служит источником гравитационного поля.

Для вывода уравнений гравитационного поля и других характеристик физической системы, описываемой интегралом действия (19. 3), необходимо будет найти его вариацию. Для этого представим (18. 3) в виде

$$I=I_g+I_m \tag{19.4}$$

и найдем вариации каждого слагаемого в отдельности.

Вычисление вариации δI_m. Запишем интеграл действия несколько подробнее

$$I_m=\frac{1}{c}\int\Lambda L_m(q,\ q_{,\sigma};\ h_a^{\sigma},\ h_{a,\lambda}^{\sigma})\,d\Omega,\qquad q_{,\sigma}\equiv\partial_\sigma q,\qquad h_{a,\lambda}^{\sigma}\equiv\partial_\lambda h_a^{\sigma}. \tag{19.5}$$

Здесь q, q_σ — совокупность всех переменных и их первых производных, которые описывают физическую систему, порождающую гравитационное поле. Коэффициенты Ламэ и их первые производные h_a^{σ}, $h_{a,\lambda}^{\sigma}$ обеспечивают, с одной стороны, инвариантность (19. 5) относительно преобразований группы (A) и (B), с другой стороны, характеризуют взаимодействие этой системы с гравитационным полем. Произвольная вариация интеграла действия (19. 5), не обращающаяся, очевидно, в нуль, запишется

$$\delta I_m=\frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\Lambda L_m}{\partial q}-\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left[\frac{\partial\Lambda L_m}{\partial q_{,\sigma}}\right]\right\}\delta q\,d\Omega+$$
$$+\frac{1}{c}\int\left\{\frac{d\Lambda L_m}{\partial h_a^{\sigma}}-\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}\left[\frac{\partial\Lambda L_m}{\partial h_{a,\tau}^{\sigma}}\right]\right\}\delta h_a^{\sigma}\,d\Omega. \tag{19.6}$$

Как обычно, при этом предполагается, что вариации δq и δh_a^{μ} на границах области Ω исчезают. Но если переменные пóля q удовлетворяют уравнениям движения или уравнениям поля, т. е. если

$$\frac{\delta\Lambda L_m}{\delta q}\equiv\frac{\partial\Lambda L_m}{\partial q}-\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left[\frac{\partial\Lambda L_m}{\partial q_{\sigma}}\right]=0, \tag{19.7}$$

то (19. 6) принимает вид

$$\delta I_m=-\frac{1}{c}\int\Lambda T_{\sigma}^{a}\delta h_a^{\sigma}\,d\Omega=+\frac{1}{c}\int\Lambda T_a^{\sigma}\delta h_{\sigma}^{a}\,d\Omega, \tag{19.8}$$

где введено следующее обозначение для тензора энергии системы — источника гравитационного поля:

$$-\Lambda T_{\sigma}^{a}=\frac{\delta\Lambda L_m}{\delta h_a^{\sigma}}. \tag{19.9}$$

Если будет задано конкретное выражение для L_m, то тензор энергии легко найдется, согласно (19. 9), причем один индекс будет ортогональный, а другой мировой, в соответствии с индексами переменной варьирования h^{σ}_{a}.

Вычисление вариации δI_g. Так как в этом случае функция Лагранжа задана в виде (19. 1), то все вычисления можно провести до конца. Запишем интеграл действия для гравитационного поля

$$I_g = \frac{1}{c} \int \Lambda L_g (h^a_{\mu},\ h^a_{\mu,\sigma})\, d\Omega. \tag{19. 10}$$

Для варьирования функцию Лагранжа удобно представить в следующем виде:

$$L_g = \frac{c^4}{8\pi\varkappa} g^{\tau\sigma} (\eta_{ab} g^{\nu\lambda} + 2 h^{\nu}_{a} h^{\lambda}_{b})\, C^{a}_{\sigma\lambda,\cdot} C^{b}_{\tau\nu,\cdot\cdot}, \tag{19. 11}$$

где

$$g^{\mu\nu} = \eta^{ab} h^{\mu}_{a} h^{\nu}_{b}, \qquad C^{a}_{\sigma\lambda,\cdot} = \frac{1}{2} (h^{a}_{\lambda,\sigma} - h^{a}_{\sigma,\lambda}). \tag{19. 12}$$

Варьируя интеграл действия (19. 10), получим

$$\delta I_g = \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda L_g}{\partial h^a_{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left[\frac{\partial \Lambda L_g}{\partial h^a_{\mu,\sigma}} \right] \right\} \delta h^a_{\mu} d\Omega. \tag{19. 13}$$

Воспользовавшись (19. 11) и (19. 12), а также учитывая следующие известные равенства:

$$\begin{gathered} \frac{\partial h^a_{\mu,\sigma}}{\partial h^b_{\nu,\tau}} = \delta^a_b \delta^{\nu}_{\mu} \delta^{\tau}_{\sigma}, \qquad \frac{\partial h^b_{\tau}}{\partial h^{\sigma}_{a}} = -h^a_{\tau} h^b_{\sigma}, \qquad \frac{\partial h^{\sigma}_{b}}{\partial h^a_{\tau}} = -h^{\sigma}_{a} h^{\tau}_{b}, \\ \delta\Lambda = \Lambda h^{\sigma}_{a} \delta h^a_{\sigma} = -\Lambda h^a_{\sigma} \delta h^{\sigma}_{a}, \qquad \Lambda = \sqrt{-g} = \mathrm{Det}\,|h^a_{\lambda}|, \end{gathered} \tag{19. 14}$$

непосредственным вычислением находим частные производные, входящие в (19. 3),

$$\frac{\partial \Lambda L_g}{\partial h^a_{\mu}} = -\frac{c^4}{4\pi\varkappa} \Lambda \left\{ 2\gamma^{b,\,cd} C_{ca,\,b} - \frac{1}{2} \delta^d_a R \right\} h^{\mu}_{d}, \tag{19. 15}$$

$$\frac{\partial \Lambda L_g}{\partial h^a_{\mu,\sigma}} = -\frac{c^4}{4\pi\varkappa} \Lambda \gamma^{\mu\sigma}_{a,\cdot\cdot}, \tag{19. 16}$$

где R соответствует выражению (18. 15). Подставляя эти производные в (19. 13), после несложных алгебраических преобразований находим

$$\delta I_g = -\frac{c^3}{4\pi\varkappa} \int \Lambda \left(R^{\mu}_{a} - \frac{1}{2} h^{\mu}_{a} R \right) \delta h^a_{\mu} d\Omega, \tag{19. 17}$$

где R^{μ}_{a} подчиняется соотношению (18. 14).

Полная вариация интеграла действия (19. 3) теперь запишется

$$\delta I = \frac{1}{c} \int \Lambda \left\{ T^{\mu}_{a} - \frac{c^4}{4\pi\varkappa} \left(R^{\mu}_{a} - \frac{1}{2} h^{\mu}_{a} R \right) \right\} \delta h^a_{\mu} d\Omega. \tag{19. 18}$$

Вариация δI при произвольных δh^a_μ, вообще говоря, не обращается в нуль, но мы требуем для получения уравнений поля, чтобы при произвольных δh^a_μ (19 18) обращалась в нуль. Но тогда подынтегральное выражение должно равняться нулю. Отсюда и следуют гравитационные уравнения Эйнштейна в тетрадной формулировке

$$R^\mu_a - \frac{1}{2} h^\mu_a R = \frac{4\pi\varkappa}{c^4} T^\mu_a. \tag{19. 19}$$

Так как при варьировании мы не пользовались условиями калибровки (вариации δh^μ_a — произвольны), то, варьируя интеграл действия с неупрощенной скалярной кривизной (9. 3), мы получили бы снова выражение вида (19. 19), где R^μ_a было бы также неупрощенное. Условия калибровки можно использовать как до, так и после варьирования.

В системе (19. 19), состоящей из шестнадцати уравнений, только шесть независимых так же, как и в метрической формулировке. Действительно, преобразования координат группы (A) дают четыре произвольные функции, ортогональные преобразования группы (B) дают еще шесть произвольных функций [1], поэтому десять из шестнадцати неизвестных функций h^a_μ можно выбрать произвольно, а потом уже их можно, при желании, подчинить условиям калибровки. Разумеется, компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ не зависят от выбора калибровки, они являются, как мы видели, скалярами относительно группы (B).

Точно так же, как и в метрической формулировке, свернутые тождества Бианки (9. 5), записанные в тетрадах, приводят к ковариантному относительно обеих групп преобразований (A) и (B) закону «сохранения» как следствия уравнений (19. 19)

$$\tilde{\nabla}_\sigma T^\sigma_a = 0, \tag{19. 20}$$

где $\tilde{\nabla}_\sigma$ — символ ковариантной относительно преобразований групп (A) и (B) производной, определенной согласно (8. 10).

Рассмотрим выражение (19. 20) более подробно. Раскрывая его согласно (8. 10), получим

$$\tilde{\nabla}_\sigma T^\sigma_a = \nabla_\sigma T^\sigma_a - \gamma^b_{\sigma,a\cdot} T^\sigma_b = 0.$$

Пусть T^σ_a — тензор энергии пылевидного вещества, движущегося во внешнем гравитационном поле, тогда

$$T^\sigma_a = \rho u^\sigma u_a, \qquad u^\sigma = \frac{dx^\sigma}{ds}, \qquad u_a = u_\tau h^\tau_a;$$

вычисляя дивергенцию, находим

$$\tilde{\nabla}_\sigma (\rho u^\sigma u_a) = u_a \nabla_\sigma (\rho u^\sigma) + \rho u^\sigma \nabla_\sigma u_a - \rho \gamma^b_{\sigma,a\cdot} u^\sigma u_b = 0. \tag{19. 20a}$$

---

[1] Мы рассматриваем общий случай, без учета калибровки.

Здесь первое слагаемое исчезает в силу закона сохранения массы. Кроме того, мы имеем

$$u^\sigma \nabla_\sigma u_a = u^\sigma \partial_\sigma u_a = \frac{du_a}{ds}, \qquad \gamma^b_{\sigma, a\cdot} u^\sigma = H^b_{a\cdot};$$

подставляя в (19. 20а), получаем

$$\frac{du_a}{ds} = H^b_{a\cdot} u_b \tag{19. 20б}$$

второй закон движения пробной частицы, который общековариантен относительно группы (A). Сравнивая это с (3. 27), (17. 3) и (17. 4), мы еще раз убеждаемся в целесообразности отождествления геометрических объектов $C_{\mu\nu\cdot}^{\ \ a}$ и $\gamma_{\sigma,\, ab}$ с индукцией и напряженностью гравитационного поля. При этом мы все время должны иметь в виду, что эти объекты есть общековариантные тензоры только относительно группы (A), но не (B), со всеми вытекающими отсюда трудностями (см. далее).

Выражение (19. 20б) можно представить и в форме уравнения геодезической линии в тетрадных компонентах

$$\frac{du_a}{ds} - \gamma^b_{\sigma, a\cdot} u^\sigma u_b = 0, \qquad \frac{\tilde{D} u_a}{ds} = 0, \tag{19. 20в}$$

что соответствует обычной интерпретации закона движения пробной частицы в поле тяготения.

Тетрадная формулировка позволяет дать уравнениям Эйнштейна наглядную квазиэлектродинамическую интерпретацию. В электродинамике, когда лангранжиан задан в форме (19. 2), производные типа (19. 16) определяют индукцию электромагнитного поля, а производные по потенциалу типа (19. 15) дают плотность источников, т. е. 4-вектор плотности свободных заряда и тока. Уравнения Максвелла в этом случае запишутся

$$\nabla_\sigma D^{\mu\sigma} = \frac{4\pi}{c} j^\mu. \tag{19. 21}$$

Эти уравнения можно рассматривать так же, как выражение плотности тока через суперпотенциал, из которого немедленно следует закон сохранения электричества.

Совершенно аналогичное разделение на поля и источники можно провести и для гравитационного поля, воспользовавшись производными (19. 16) и (19. 15). Тогда уравнения Эйнштейна (19. 19) примут следующий квазимаксвелловский вид

$$\nabla_\sigma \gamma^{\mu\sigma}_{a,\,\cdot\cdot} = -\frac{4\pi\varkappa}{c^4} \Theta_a^{\cdot\mu}, \tag{19. 22}$$

где введены обозначения

$$\Theta_a^{\cdot\mu} = T^\mu_a + t_a^{\cdot\mu}, \tag{19. 23}$$

$$t_a^{\cdot\mu} = -\frac{c^4}{4\pi\varkappa}\left\{2\gamma^{b,\, d\mu} C_{da,\, b} - \frac{1}{2} h^\mu_a R\right\}. \tag{19. 24}$$

Из уравнений поля (19. 22) вытекает как следствие

$$\partial_\mu \{\Lambda \Theta_a^{\cdot\mu}\} = 0. \tag{19. 25}$$

Сопоставление этих результатов показывает, что общековариантный относительно группы (A) тензор (19. 23) можно отождествить с тензором плотности полных энергии-импульса системы, а тензор (19. 24) — с тензором плотности энергии-импульса гравитационного поля. В дальнейшем подкрепим эту аналогию с помощью теоремы Э. Нетер. Легко видеть, что структура тензора $t_a^{\cdot\mu}$ в точности соответствует тензору энергии электромагнитного поля при наличии среды. Это еще раз оправдывает наше отождествление и использование электродинамической терминологии.

Пусть $T_a^\mu = 0$, т. е. отсутствуют движущиеся массы, электромагнитные поля — обычные источники гравитационного поля. Тогда уравнения гравитационного поля (19. 22) примут следующий вид:

$$\nabla_\sigma \gamma_{a,\,..}^{\mu\sigma} = -\frac{4\pi\varkappa}{c^4} t_a^{\cdot\mu}, \tag{19. 26}$$

который показывает, что гравитационное поле само себе служит источником. Это, очевидно, возможно только в том случае, если поле подчиняется нелинейным уравнениям, каковыми и являются уравнения Эйнштейна.

20. Энергия, импульс и момент количества движения гравитационного поля

В плоском пространстве для получения тензоров плотности энергии, импульса и момента количества движения системы мы, в соответствии с теоремой Э. Нетер, исследуем вариации интеграла действия, обусловленные бесконечно малыми сдвигами начала отсчета и вращениями лоренцевой системы координат [1]. При наличии гравитационного поля, т. е. в искривленном пространстве, все указанные исследования носят локальный характер. Лоренцеву глобальную тетраду и связанную с ней галилееву систему координат теперь заменяет локальная тетрада $\{O, \mathbf{h}_a\}$ и связанная с ней локальная неголономная система координат x^a. Поэтому тензор плотности энергии-импульса и его закон сохранения должны получиться как следствие инвариантности действия относительно бесконечно малых сдвигов начал отсчета локальных неголономных систем координат. Это эквивалентно бесконечно малым преобразованиям голономной координатной сетки — группа (A), так как дифференциалы голономных и неголономных координат однозначно связаны, согласно (7. 3), посредством коэф-

[1] Правильнее сказать — вращениями лоренцевой глобальной тетрады, с которой связана галилеева система координат, ибо понятие вращения, вообще говоря, не приложимо к координатным линиям.

фициентов Ламэ. Сами локальные тетрады, разумеется, никуда не сдвигаются, изменяются лишь координаты их начал, ибо тетрады своими началами «намертво» скреплены с точками многообразия, в которых соприкасаются многообразие и локальное касательное пространство.

Точно так же тензор плотности момента количества движения и его закон сохранения должны быть следствием инвариантности интеграла действия относительно локальных вращений тетрад, т. е. относительно группы (B).

Пусть $L\,(q_\alpha;\ q_{\alpha,\,\sigma})$ есть полный лагранжиан, описывающий как гравитационное поле, так и физическую систему, его порождающую. Функции q_α и $q_{\alpha,\,\sigma}$ — набор переменных поля и их производных первого порядка, сюда же включаются и переменные гравитационного поля — коэффициенты Ламэ.

Рассмотрим интеграл действия

$$I=\frac{1}{c}\int\tilde{L}\,(q_\alpha;\ q_{\alpha,\sigma})\,d\Omega,\qquad \tilde{L}=\Lambda L,\tag{20.1}$$

инвариантный относительно преобразований группы (A) и (B). Тогда изменение интеграла действия, обусловленное преобразованиями группы (A) или (B), запишется как

$$\Delta I=\frac{1}{c}\int\{\delta\tilde{L}+\partial_\sigma(\tilde{L}\Delta x^\sigma)\}\,d\Omega,\tag{20.2}$$

при этом вариация $\delta\tilde{L}$ имеет вид:

$$\delta\tilde{L}=\frac{\delta\tilde{L}}{\delta q_\alpha}\,\delta q_\alpha+\partial_\sigma\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_{\alpha,\,\sigma}}\,\delta q_\alpha\right),\qquad \frac{\delta\tilde{L}}{\delta q_\alpha}\equiv\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_\alpha}-\partial_\sigma\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_{\alpha,\,\sigma}}\right).\tag{20.3}$$

С другой стороны, если изменение интеграла действия (20. 2) обусловлено преобразованиями группы (A) или (B), то в силу инвариантности I имеем $\Delta I=0$. Это дает

$$\delta\tilde{L}+\partial_\sigma(\tilde{L}\Delta x^\sigma)=0\tag{20.4}$$

или

$$\frac{\delta\tilde{L}}{\delta q_\alpha}\,\delta q_\alpha+\partial_\sigma\left\{\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_{\alpha,\,\sigma}}\,\delta q_\alpha+\tilde{L}\Delta x^\sigma\right\}=0.\tag{20.5}$$

Если выполняются уравнения поля для всех полей, описывающих физическую систему, т. е. если

$$\frac{\delta\tilde{L}}{\delta q_\alpha}=0,\qquad \alpha=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\tag{20.6}$$

где n — число всех компонент различных полей, то в соответствии с теоремой Э. Нетер получим

$$\partial_\sigma\left\{\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_{\alpha,\,\sigma}}\,\delta q_\alpha+\tilde{L}\Delta x^\sigma\right\}=0.\tag{20.7}$$

Дальнейшие вычисления возможны только после конкретизации лагранжиана L и набора функций q_α.

Рассмотрим теперь бесконечно малые сдвиги начал отсчета локальных неголономных систем координат. Локальными параметрами здесь будут Δx^a — компоненты вектора смещения начала отсчета, отнесенного к локальной тетраде. Изменение голономной координатной сетки в соответствии с (7. 3) запишется

$$\Delta x^{\mu} = h^{\mu}_{a} \Delta x^{a}, \tag{20. 8}$$

т. е. сдвигу начала отсчета неголономной системы координат можно всегда сопоставить, как уже мы отмечали, некоторое бесконечно малое преобразование координатной сетки (группа (A))

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \Delta x^{\mu}. \tag{20. 9}$$

Каковы бы ни были трансформационные свойства набора функций q_{α}, полное изменение их компонент, а также вариацию, обусловленную преобразованием (20. 9), по определению, можно записать так:

$$\begin{gathered} \Delta_A q_{\alpha} = {}'q\,(x'^{\mu}) - q_{\alpha}(x^{\mu}), \qquad \delta_A q_{\alpha} = {}'q_{\alpha}(x^{\mu}) - q_{\alpha}(x^{\mu}), \\ \Delta_A q_{\alpha} = \delta_A q_{\alpha} + q_{\alpha,\sigma} \Delta x^{\sigma}. \end{gathered} \tag{20. 10}$$

Для дальнейшего полезно в общем наборе функций q_{α} выделить переменные гравитационного поля h^{a}_{μ}, поэтому будем далее общий набор переменных представлять в виде

$$q_{\alpha} \to \{\tilde{q}_{\alpha};\ h^{a}_{\mu}\}, \tag{20. 11}$$

где $\tilde{q}_{\alpha}$ могут быть скаляры, компоненты спинора, вектора, т. е. компоненты любых полей, кроме гравитационного.

Вариации этих полей, порожденные группой (A), можно записать следующим образом [19]:

$$\delta_A \tilde{q}_{\alpha} = B_{\alpha\tau} \Delta x^{\tau} + B^{\lambda}_{\alpha\tau} (\Delta x^{\tau})_{,\lambda} + \ldots, \tag{20. 12}$$

где опущенные члены пропорциональны высшим производным от приращения Δx^{τ}, которых может и не быть, это зависит от трансформационных свойств поля $\tilde{q}_{\alpha}$. Так, например, если $\tilde{q}_{\alpha}$ — компоненты вектора, то, как легко установить, имеют место следующие равенства:

$$B_{\alpha\tau} = -\tilde{q}_{\alpha,\tau}, \qquad B^{\lambda}_{\alpha\tau} = -\tilde{q}_{\tau} \delta^{\lambda}_{\alpha}, \tag{20. 13}$$

остальные члены в последовательности (20. 12) равны нулю.

Вариацию (20. 12) можно выразить также через приращения Δx^a неголономной ортогональной координатной сетки, воспользовавшись для этого соотношением (20. 8). Тогда получим

$$\delta_A \tilde{q}_{\alpha} = D_{\alpha a} \Delta x^{a} + D^{\lambda}_{\alpha a} (\Delta x^{a})_{,\lambda} + \ldots \tag{20. 14}$$

Подставляя (20. 8) в (20. 12) и учитывая (20. 14), мы, очевидно, найдем связь между коэффициентами B и D.

В качестве примера вычислим вариацию $\delta_A h^a_\mu$, необходимую в дальнейшем. Из (20. 9) находим

$$x^\nu = x'^\nu - \Delta x^\nu, \qquad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu_\mu - \frac{\partial \Delta x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu_\mu - \frac{\partial \Delta x^\nu}{\partial x^\mu} + \ldots,$$

далее по правилам преобразования ковариантного вектора, а также в соответствии с (20. 10) получаем

$$h'^a_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} h^a_\nu(x) = h^a_\mu - h^a_\nu \frac{\partial \Delta x^\nu}{\partial x^\mu}, \qquad \Delta_A h^a_\mu = -h^a_\nu \frac{\partial \Delta x^\nu}{\partial x^\mu},$$

$$\delta_A h^a_\mu = \Delta_A h^a_\mu - h^a_{\mu,\nu} \Delta x^\nu = -h^a_\nu \frac{\partial \Delta x^\nu}{\partial x^\mu} - h^a_{\mu,\nu} \Delta x^\nu.$$

Подставляя в последнее выражение значение Δx^ν из (20. 8), после несложных преобразований окончательно находим

$$\delta_A h^a_\mu = 2C^{a}_{\mu b,\,\cdot} \Delta x^b - \partial_\mu \Delta x^a. \tag{20. 15}$$

Сравнивая (20. 15) и (20. 14), мы определяем значение коэффициентов D специально для переменных поля гравитации h^a_μ

$$\delta h^a_\mu = D^a_{\mu b} \Delta x^b + D^{a\lambda}_{\mu b} \partial_\lambda \Delta x^b,$$

где, очевидно, имеют место следующие равенства:

$$D^a_{\mu b} = 2C^a_{\mu b,\,\cdot}, \qquad D^{a\lambda}_{\mu b} = -\delta^a_b \delta^\lambda_\mu.$$

Рассмотрим теперь бесконечно малые преобразования группы (B). Согласно (18. 8)—(18. 10), локальными параметрами здесь будут ξ^{ab}, которые удовлетворяют условиям

$$\xi^{ab} = -\xi^{ba}, \qquad h^\sigma_b \partial_\sigma \xi^{ab} = 0, \qquad \Delta x^\mu = \Delta x^a = 0; \tag{20. 16}$$

следовательно, координатные тетрады $\{O, \mathbf{h}_a\}$ подвергаются бесконечно малым поворотам, а координатные сетки остаются неизменными. Заметим, что хотя вместе с координатной тетрадой подвергнется повороту также и локальная галилеева система x^a, однако изменения координат Δx^a будут величинами второго порядка малости, которыми мы пренебрегаем. Действительно, x^a — уже величина первого порядка малости, так как область определения неголономных координат — бесконечно малая окрестность начала локальной тетрады. Тогда, подвергая ортогональному преобразованию координаты x^a, согласно (18. 8), имеем

$$\tilde{x}^a = \omega^a_b x^b = x^a + \xi^a_b x^b,$$
$$\Delta x^a = \tilde{x}^a - x^a = \xi^a_b x^b \approx 0.$$

Вариация переменных поля $\tilde{q}_\alpha$ может быть записана в виде

$$\delta_{\bar{B}} \tilde{q}_\alpha = \frac{1}{2} P^\beta_{\alpha,\,ab} \tilde{q}_\beta \xi^{ab}, \tag{20. 17}$$

где коэффициенты P зависят от трансформационных свойств переменных поля $\tilde{q}_\alpha$. Если $\tilde{q}_a$ — ортогональные компоненты вектора, то

$$P^d_{a,bc} = \eta_{ab}\delta^d_c - \eta_{ac}\delta^d_b, \qquad \delta_{\bar{B}}\tilde{q}_a = \frac{1}{2} P^d_{a,bc}\tilde{q}_d\xi^{bc} = \eta_{ac}\tilde{q}_b\xi^{bc}. \tag{20.18}$$

В частности, для переменных гравитационного поля находим

$$\delta_{\bar{B}} h^a_\mu = \eta_{bc} h^c_\mu \xi^{ab} = \xi^a_{\cdot b} h^b_\mu. \tag{20.19}$$

После установления вариаций δ_A и $\delta_{\bar{B}}$ мы можем продолжить вычисления, связанные с равенством (20. 7), и получить тензоры энергии, импульса и момента количества движения, а также законы их сохранения.

Рассмотрим сначала важный частный случай, когда в пространстве имеется только гравитационное поле. Для получения тензора энергии и его закона сохранения в равенстве (20. 7) следует положить

$$\tilde{L} = \tilde{L}_g, \qquad \delta q_\alpha \to \delta_A h^a_\mu, \qquad \Delta x^\sigma = h^\sigma_a \Delta x^a,$$

тогда

$$\partial_\sigma \left\{ \frac{\partial \tilde{L}_g}{\partial h^a_{\mu,\sigma}} \delta_A h^a_\mu + \tilde{L}_g h^\sigma_a \Delta x^a \right\} = 0. \tag{20.20}$$

Подставляя значения вариации (20. 15) в (20. 20) и выполняя дифференцирование, найдем

$$\partial_\sigma \{\Lambda t_a^{\cdot\sigma}\} \Delta x^a + \left\{ \Lambda t_a^{\cdot\mu} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial \tilde{L}_g}{\partial h^a_{\mu,\sigma}} \right) \right\} \partial_\mu \Delta x^a - \\ - \frac{\partial \tilde{L}_g}{\partial h^a_{\mu,\sigma}} \partial_\mu \partial_\sigma \Delta x^a = 0. \tag{20.21}$$

Так как параметры Δx^a и их производные произвольны, то из (20. 21) получаем

$$\frac{\partial L_g}{\partial h^a_{\mu,\sigma}} = - \frac{\partial L_g}{\partial h^a_{\sigma,\mu}}, \qquad \tilde{L}_g = \Lambda L_g, \tag{20.22}$$

$$t_a^{\cdot\mu} = \frac{1}{\Lambda} \partial_\sigma \left\{ \frac{\partial \Lambda L_g}{\partial h^a_{\mu,\sigma}} \right\}, \tag{20.23}$$

$$\nabla_\sigma t_a^{\cdot\sigma} = 0. \tag{20.24}$$

Здесь мы ввели следующее обозначение:

$$t_a^{\cdot\mu} = \frac{2}{\Lambda} \left\{ \frac{\partial \Lambda L_g}{\partial h^b_{\sigma,\mu}} C^b_{\sigma a,\cdot} + \frac{1}{2} \Lambda h^\mu_a L_g \right\}. \tag{20.25}$$

Проделав вычисления с L_g, взятом в виде (19. 1), убедимся, что (20. 25) совпадает с выражением (19. 24) для $t_a^{\cdot\mu}$. Итак, мы можем утверждать, что ковариантный относительно группы (A) тензор

(19. 24) является тензором плотности энергии-импульса гравитационного поля. Соотношение (20. 23) есть выражение $t_a^{\cdot\mu}$ через суперпотенциал.

Рассмотрим теперь бесконечно малые преобразования группы $(\bar{B})$, т. е. локальные лоренцевы вращения тетрад. В этом случае, используя (20. 16) и (20. 19), соотношение (20. 7) запишем таким образом:

$$\partial_\sigma \left\{ \frac{\partial \Lambda L_g}{\partial h^a_{\mu,\sigma}} \delta_{\bar{B}} h^a_\mu \right\} = 0, \tag{20. 26}$$

отсюда следует

$$\frac{1}{2} \partial_\sigma \{ \Lambda \underset{(g)}{S^\sigma_{ab\cdot}} \xi^{ab} \} = 0, \tag{20. 27}$$

где введено такое обозначение:

$$\Lambda \underset{(g)}{S^\sigma_{ab\cdot}} = \left\{ \frac{\partial \Lambda L_g}{\partial h^a_{\mu,\sigma}} \eta_{bc} - \frac{\partial \Lambda L_g}{\partial h^b_{\mu,\sigma}} \eta_{ac} \right\} h^c_\mu. \tag{20. 28}$$

Выполняя дифференцирование в (20. 27), получаем

$$\{ \nabla_\sigma \underset{(g)}{S^\sigma_{ab\cdot}} \} \xi^{ab} + \underset{(g)}{S^\sigma_{ab\cdot}} \partial_\sigma \xi^{ab} = 0. \tag{20. 29}$$

Так как производные $\partial_\sigma \xi^{ab}$ не произвольны, а подчинены условиям (18. 10), которые в нашем случае запишутся в виде (20. 16), то, очевидно, $\underset{(g)}{S^\sigma_{ab\cdot}} \neq 0$. С другой стороны, параметры ξ^{ab} произвольны, тогда

$$\nabla_\sigma \underset{(g)}{S^\sigma_{ab\cdot}} = 0. \tag{20. 30}$$

Величину $\underset{(g)}{S^\sigma_{ab\cdot}}$ мы отождествляем с тензором плотности момента количества движения гравитационного поля, а выражение (20. 30) дает закон его сохранения. Произведя вычисления, согласно (20. 28), найдем

$$\underset{(g)}{S^\sigma_{ab\cdot}} = \frac{c^4}{2\pi\varkappa} C^\sigma_{ab,\cdot}. \tag{20. 31}$$

Таким образом, если в пространстве имеется только одно гравитационное поле, то приходим к следующим законам сохранения:

$$\partial_\sigma \{ \Lambda t_a^{\cdot\sigma} \} = 0, \qquad \partial_\sigma \{ \Lambda \underset{(g)}{S^\sigma_{ab\cdot}} \} = 0. \tag{20. 31а}$$

Интегрируя выражения (19. 24) и (20. 31) обычным образом, мы получим сохраняющиеся величины энергии-импульса и момента количества движения гравитационного поля

$$\underset{(g)}{P_a} = \frac{1}{c} \int \Lambda t_a^{\cdot\sigma} dV_\sigma, \qquad \underset{(g)}{S_{ab}} = \frac{1}{c} \int \Lambda \underset{(g)}{S^\sigma_{ab\cdot}} dV_\sigma. \tag{20. 31б}$$

При этом интегралы не зависят от выбора координатной сетки, так как под интегралами стоят скаляры относительно группы (A).

Рассмотрим теперь общий случай, когда физическая система состоит из гравитационного поля и его источников любой природы. В этом случае мы должны положить $\tilde{L}=\tilde{L}_m+\tilde{L}_g$. Тогда соотношение (20. 5) запишется

$$\frac{\delta\tilde{L}_m}{\delta\tilde{q}_\alpha}\delta\tilde{q}_\alpha+\frac{\delta\tilde{L}}{\delta h^a_\mu}\delta h^a_\mu+$$
$$+\partial_\sigma\left\{\left(\frac{\partial\tilde{L}_m}{\partial\tilde{q}_{\alpha,\sigma}}\tilde{\delta}q_\alpha+\tilde{L}_m\Delta x^\sigma\right)+\left(\frac{\partial\tilde{L}_g}{\partial h^a_{\mu,\sigma}}\delta h^a_\mu+\tilde{L}_g\Delta x^\sigma\right)\right\}=0. \quad (20.32)$$

Если $\tilde{q}_\alpha$ удовлетворяет своим уравнениям поля, то первое слагаемое обращается в нуль. Если h^a_μ удовлетворяет уравнениям Эйнштейна (19. 19) или (19. 22), то и второе слагаемое также обращается в нуль, и мы получаем

$$\partial_\sigma\left\{\left(\frac{\partial\tilde{L}_m}{\partial\tilde{q}_{\alpha,\sigma}}\delta\tilde{q}_\alpha+\tilde{L}_m\Delta x^\sigma\right)+\left(\frac{\partial\tilde{L}_g}{\partial h^a_{\mu,\sigma}}\delta h^a_\mu+\tilde{L}_g\Delta x^\sigma\right)\right\}=0. \quad (20.33)$$

Допустим, что вариация переменных поля обусловлена преобразованиями группы (A), тогда, подставляя (20. 14) и (20. 15) в (20. 33) и проводя необходимое дифференцирование, имеем

$$\partial_\sigma\{\Lambda(\tilde{T}_a^{\cdot\sigma}+t_a^{\cdot\sigma})\}\Delta x^a+$$
$$+\left\{\Lambda(\tilde{T}_a^{\cdot\sigma}+t_a^{\cdot\sigma})-\partial_\tau\left[\Lambda\left(W_{a\cdot\cdot}^{\tau\sigma}+\frac{c^4}{4\pi\varkappa}\gamma_{a,\cdot\cdot}^{\tau\sigma}\right)\right]\right\}\partial_\sigma\Delta x^a+$$
$$+\Lambda\left(W_{a\cdot\cdot}^{\tau\sigma}+\frac{c^4}{4\pi\varkappa}\gamma_{a,\cdot\cdot}^{\tau\sigma}\right)\partial_\tau\partial_\sigma\Delta x^a=0. \quad (20.34)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Lambda\tilde{T}_a^{\cdot\sigma}=\frac{\partial\tilde{L}_m}{\partial\tilde{q}_{\alpha,\sigma}}D_{\alpha a}+2\frac{\partial\tilde{L}_m}{\partial h^b_{\mu,\sigma}}C^b_{\mu a,\cdot}+h^\sigma_a\tilde{L}_m, \quad (20.35)$$

$$\Lambda W_{a\cdot\cdot}^{\tau\sigma}=-\frac{\partial\tilde{L}_m}{\partial h^a_{\tau,\sigma}}+\frac{\partial\tilde{L}_m}{\partial\tilde{q}_{\alpha,\sigma}}D^\tau_{\alpha a}. \quad (20.36)$$

Так как приращения Δx^a и их производные произвольны, то в выражении (20. 34) коэффициенты, стоящие при Δx^a и их производных, должны равняться нулю. Это дает

$$\partial_\sigma\{\Lambda(\tilde{T}_a^{\cdot\sigma}+t_a^{\cdot\sigma})\}=0, \quad (20.37)$$

$$\Lambda(\tilde{T}_a^{\cdot\sigma}+t_a^{\cdot\sigma})=\partial_\tau\left\{\Lambda\left(W_{a\cdot\cdot}^{\tau\sigma}+\frac{c^4}{4\pi\varkappa}\gamma_{a\cdot\cdot}^{\tau\sigma}\right)\right\}, \quad (20.38)$$

$$W_{a\cdot\cdot}^{\tau\sigma}=-W_{a\cdot\cdot}^{\sigma\tau}. \quad (20.39)$$

Тензор (20. 35) представляет собой канонический тензор энергии-импульса системы, порождающей гравитационное поле. Выражение (20. 37) определяет закон сохранения суммарного тензора — канонического и тензора энергии-импульса гравитацион-

ного поля. Равенство (20. 38) есть выражение суммарного тензора через суперпотенциал.

Воспользовавшись равенствами (20. 38), (19. 22), (19. 23), легко найти связь между каноническим $\tilde{T}_a^{\cdot\sigma}$ и «метрическим» $T_a^{\cdot\sigma}$ тензорами энергии-импульса источников гравитационного поля

$$T_a^{\sigma} = \tilde{T}_a^{\cdot\sigma} + \nabla_\tau W_{a\cdot\cdot}^{\sigma\tau}; \tag{20. 40}$$

здесь второе слагаемое обусловлено поляризационными свойствами поля $\tilde{q}_\alpha$, в частности его спином.

Рассмотрим теперь вариации переменных поля, связанные с преобразованиями группы $(\bar{B})$. В этом случае в выражении (20. 33) следует положить $\Delta x^\sigma = 0$ и вместо вариаций переменных поля подставить их значения (20. 17) и (20. 19), тогда получим

$$\partial_\sigma \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{L}_m}{\partial \tilde{q}_{\alpha,\sigma}} P^{\beta}_{\alpha ab} \tilde{q}_\beta \xi^{ab} + \frac{\partial (\tilde{L}_m + \tilde{L}_g)}{\partial h^a_{\mu,\sigma}} \eta_{bc} h^c_\mu \xi^{ab} \right\} = 0. \tag{20. 41}$$

После необходимых преобразований находим

$$\frac{1}{2} \partial_\sigma \left\{ \Lambda S^{\sigma}_{ab\cdot} \xi^{ab} \right\} = 0, \qquad S^{\sigma}_{ab\cdot} = \underset{(m)}{S^{\sigma}_{ab\cdot}} + \underset{(g)}{S^{\sigma}_{ab\cdot}}, \tag{20. 42}$$

где момент количества движения источников гравитационного поля выражается следующим образом:

$$\underset{(m)}{S^{\sigma}_{ab\cdot}} = \frac{\partial \tilde{L}_m}{\partial \tilde{q}_{\alpha,\sigma}} P^{\beta}_{\alpha ab} \tilde{q}_\beta + \left(\frac{\partial \tilde{L}_m}{\partial h^a_{\mu,\sigma}} h^c_\mu \eta_{bc} - \frac{\partial \tilde{L}_m}{\partial h^b_{\mu,\sigma}} h^c_\mu \eta_{ac} \right). \tag{20. 43}$$

Далее, проделывая буквально те же операции, которые привели к результату (20. 30), мы находим закон сохранения полного момента количества движения источников и самого гравитационного поля

$$\nabla_\sigma S^{\sigma}_{ab\cdot} = \frac{1}{\Lambda} \partial_\sigma \Lambda S^{\sigma}_{ab\cdot} = 0. \tag{20. 44}$$

Следует отметить, что тензор моментов гравитационного поля $\underset{(g)}{S^{\sigma}_{ab\cdot}}$, который выражается в виде (20. 31), сохраняется независимо вследствие равенства (18. 7).

Таким образом, мы получаем для всей физической системы следующие десять интегралов движения:

$$P_a = \frac{1}{c} \int \Lambda \Theta_a^{\cdot\sigma} dV_\sigma, \qquad S_{ab} = \frac{1}{c} \int \Lambda S^{\sigma}_{ab\cdot} dV_\sigma, \tag{20. 45}$$

где $\Theta_a^{\cdot\sigma}$ дается выражением (19. 23).

Отметим, что в литературе, кроме законов сохранения (20. 33), которые называются «слабыми», так как выполняются только при соблюдении уравнений поля, рассматриваются еще так называемые «сильные» законы сохранения. Последние представляют собой тождества, вытекающие как следствия инвариантности действия относительно произвольных преобразований координат, и имеют

место независимо от того, выполняются или нет уравнения поля. Легко видеть, что с точки зрения физики эти «сильные» законы сохранения гораздо слабее «слабых», так как они содержат значительно меньше информации о физической системе, поскольку переменные поля не подчиняются здесь уравнениям поля. Тем не менее «сильные» законы сохранения могут рассматриваться как универсальное средство для получения полезных вспомогательных соотношений.

21. Центрально-симметричное гравитационное поле

Рассмотрим случай статического центрально-симметричного гравитационного поля, порожденного точечной массой (поле Шварцшильда). Гравитационные потенциалы h^a_μ в этом случае будут решениями уравнений (19. 22), в которых следует положить $T^\mu_a = 0$.

$$\nabla_\sigma \gamma^{\mu\sigma}_{a,\cdot\cdot} = -\frac{4\pi\varkappa}{c^4} t_a^{\cdot\mu}, \tag{21. 1}$$

где $t_a^{\cdot\mu}$ имеет вид (19. 24). Однако проще сначала найти решение уравнений Эйнштейна, которые еще не подчинены условиям калибровки, а затем уже потребовать выполнения этих условий.

В ортогональных компонентах уравнения Эйнштейна для данного случая запишутся в виде

$$R^a_b - \frac{1}{2}\delta^a_b R = 0$$

или, учитывая, что $R = 0$, окончательно имеем

$$R^a_b = 0. \tag{21. 2}$$

Из (9. 2) легко находим

$$R^a_b = -\nabla_\sigma \gamma^{a\sigma}_{b,\cdot\cdot} + \gamma^{c,\,ad}\gamma_{d,\,bc} + 2h^\sigma_b \partial_\sigma C^{ad,\,\cdot}_{d}{}^{\cdot}. \tag{21. 3}$$

Мы выберем так называемые квазидекартовы пространственные координаты x^k, $k=1, 2, 3$, которые связаны со «сферическими» r, θ, φ обычными преобразованиями.

Решение будем искать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \tilde{h}^{(s)}_k &= \delta^s_k + v n^s n_k, \\ \tilde{h}^{(0)}_0 &= f, \qquad \tilde{h}^{(k)}_0 = \tilde{h}^{(0)}_k = 0. \end{aligned} \tag{21. 4}$$

Функции v и f зависят только от «радиуса» r, при этом

$$\begin{aligned} & r^2 = \sum_k (x^k)^2, \qquad n_k = \partial_k r = \frac{x^k}{r}, \qquad n^k n_k = 1, \\ & n^k = n_k, \qquad x^0 = ct; \\ & \partial_s n^k = \frac{1}{r}(\delta^k_s - n^k n_s), \qquad \partial_s n_k = \frac{1}{r}(\delta_{sk} - n_s n_k). \end{aligned} \tag{21. 5}$$

Далее обычным путем находим

$$\Lambda = \operatorname{Det} | \tilde{h}^{a}_{\mu} | = f(1+v),$$

$$\tilde{h}^{k}_{(s)} = \delta^{k}_{s} - \frac{v}{1+v} n^{k} n_{s}, \qquad \tilde{h}^{0}_{(0)} = \frac{1}{f}, \qquad \tilde{h}^{k}_{(0)} = \tilde{h}^{0}_{k} = 0. \tag{21.6}$$

Согласно (7. 4), вычисляем компоненты объекта неголономности

$$\tilde{C}^{(s)}_{kl\cdot} = \frac{v}{r} \delta^{s}_{[k} n_{l]}, \qquad \tilde{C}^{(0)}_{k0\cdot} = \frac{1}{2} f' n_{k}, \qquad f' = \frac{df}{dr},$$

$$\tilde{C}^{(0)}_{kl\cdot} = \tilde{C}^{(s)}_{k0\cdot} = 0.$$

Переходя с помощью (21. 6) к ортогональным компонентам, получим

$$\tilde{C}^{(s)}_{(k)(l)\cdot} = \frac{v}{r(1+v)} \delta^{s}_{[k} n_{l]}, \qquad \tilde{C}^{(0)}_{(k)(0)\cdot} = \frac{f'}{2f(1+v)} n_{k},$$

$$\tilde{C}^{(0)}_{(k)(l)\cdot} = \tilde{C}^{(s)}_{(k)(0)\cdot} = 0, \qquad \tilde{C}^{(k)d}_{\cdot\cdot d} = -\frac{rf' - 2fv}{2rf(1+v)} n^{k}.$$

Образуя ортогональные компоненты коэффициентов вращения Риччи по формуле, которая следует из (8. 7),

$$\tilde{\gamma}_{a,bc} = \tilde{C}_{ba,c} + \tilde{C}_{bc,a} + \tilde{C}_{ac,b},$$

находим

$$\tilde{\gamma}_{(k),(l)(s)} = -\frac{2v}{r(1+v)} \delta_{k[l} n_{s]}, \qquad \tilde{\gamma}_{(0),(0)(k)} = -\frac{f'}{f(1+v)} n_{k},$$

$$\tilde{\gamma}_{(0),(l)(s)} = \tilde{\gamma}_{(k),(l)(0)} = 0.$$

Для вычисления компонент тензора Риччи (21. 3) приводим следующие необходимые выражения:

$$\tilde{\gamma}^{c,(k)d} \tilde{\gamma}_{d,(l)c} = -\frac{2f^{2}v^{2} + r^{2}f'^{2}}{r^{2}f^{2}(1+v)^{2}} n^{k} n_{l}, \qquad \psi = \frac{rf' - 2fv}{2rf(1+v)},$$

$$\tilde{h}^{s}_{(l)} \partial_{s} \tilde{C}^{(k)d\cdot}_{d} = -\frac{\psi'}{1+v} n^{k} n_{l} - \frac{1}{r} \psi (\delta^{k}_{l} - n^{k} n_{l}),$$

$$\nabla_{\sigma} \tilde{\gamma}^{\cdot(k)\sigma}_{(l),} = \frac{1}{\Lambda} \left\{ \frac{fv(v-1)}{r^{2}(v+1)} - \left(\frac{fv}{r(1+v)} \right)' \right\} (\delta^{k}_{l} - n^{k} n_{l}) - \tag{21.7}$$

$$- \frac{2fv}{\Lambda r^{2}} n^{k} n_{l}.$$

Полагая в (21. 3) $a=(k)$, $b=(l)$ и подставляя (21. 7), после некоторых преобразований имеем

$$R^{(k)}_{(l)} = \frac{1}{\Lambda} \left\{ f(1+v) - \left(\frac{rf}{1+v} \right)' \right\} (\delta^{k}_{l} - n^{k} n_{l}) +$$

$$+ \frac{1}{\Lambda} \left\{ \frac{2fv}{r^{2}(1+v)} - \frac{f'^{2}}{f(1+v)} - f \left(\frac{rf' - 2fv}{rf(1+v)} \right)' \right\} n^{k} n_{l}, \tag{21.8}$$

$$R^{(0)}_{(0)} = -\frac{1}{\Lambda r^{2}} \left(\frac{r^{2} f'}{1+v} \right)'.$$

Остальные компоненты тензора Риччи тождественно обращаются в нуль. В соответствии с (21. 2) приравнивая нулю компоненты (21. 8), мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{2fv}{r^2(1+v)}-\frac{f'^2}{f(1+v)}-f\left(\frac{rf'-2fv}{rf(1+v)}\right)'=0,\\ f(1+v)-\left(\frac{rf}{1+v}\right)'=0,\qquad \left(\frac{r^2f'}{1+v}\right)'=0.\end{gathered}\tag{21.9}$$

Сделав замену переменных

$$f=e^{\frac{1}{2}\mu},\qquad 1+v=e^{\frac{1}{2}\nu},\qquad \mu=\mu(r),\quad \nu=\nu(r),$$

приходим к новой системе

$$\frac{1}{2}\mu''+\frac{1}{4}\mu'(\mu'-\nu')-\frac{\nu'}{r}=0,\qquad \frac{1}{2}\mu''+\frac{1}{4}\mu'(\mu'-\nu')+\frac{\mu'}{r}=0,$$

$$\frac{1}{2}(\mu'-\nu')-\frac{1}{r}(e^{\nu}-1)=0,$$

которая равносильна системе уравнений задачи Шварцшильда в метрической формулировке ОТО. Она легко интегрируется, и решение представляется таким образом:

$$f=\frac{1}{1+v}=\left(1-\frac{2r_0}{r}\right)^{1/2},\qquad r_0=\frac{\varkappa m}{c^2},\qquad \Lambda=1,\tag{21.10}$$

где постоянная интегрирования выбрана, как известно, исходя из требования соответствия с теорией тяготения Ньютона в слабом гравитационном поле. Теперь коэффициенты Ламэ (21. 4) и (21. 6) принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}\tilde{h}^{(s)}_k=\delta^s_k+\frac{1}{f}(1-f)\,n^s n_k,\qquad \tilde{h}^{(0)}_0=f,\\ \tilde{h}^k_{(s)}=\delta^k_s-(1-f)\,n^k n_s,\qquad \tilde{h}^0_{(0)}=\frac{1}{f}.\end{gathered}\tag{21.11}$$

Полученное решение, очевидно, не удовлетворяет условиям калибровки; действительно, вычисляя расходимость от $\tilde{h}^\sigma_a$, находим

$$\nabla_\sigma\tilde{h}^\sigma_{(s)}=\partial_l\tilde{h}^l_{(s)}=\frac{2}{rf}\left(1-f-\frac{3r_0}{2r}\right)n_s\neq 0.$$

Далее следует найти такое преобразование $\omega^a_{\cdot b}$, чтобы преобразованные потенциалы

$$h^a_\mu=\omega^a_{\cdot b}\tilde{h}^b_\mu\tag{21.12}$$

удовлетворяли условиям калибровки (18. 3). Соответствующие уравнения для определения функций $\omega^a_{\cdot b}$, согласно (18. 5), запишутся

$$\tilde{h}^\sigma_b\partial_\sigma\omega^{\cdot b}_a+2\tilde{C}^b_{db,\cdot}\omega^{\cdot d}_a=0.\tag{21.13}$$

Решение системы уравнений (21. 13) будем искать в виде

$$\omega^{\cdot(k)}_{(s)} = A\delta^k_s + Bn_s n^k + CE^{km}_{s\cdot\cdot}n_m,$$
$$\omega^{\cdot(0)}_{(0)} = 1, \qquad \omega^{\cdot(k)}_{(0)} = \omega^{\cdot(0)}_{(k)} = 0, \qquad E_{123} = 1; \tag{21. 14}$$

здесь E_{skm} — полностью антисимметричный единичный тензор; A, B, C — функции от r. Условия ортогональности дают

$$A+B=1, \ A^2+C^2=1. \tag{21. 15}$$

Подставляя (21. 14) в (21. 13), мы находим неизвестные функции

$$A = \frac{1}{f}\left(1-\frac{3r_0}{2r}\right), \qquad B = 1-\frac{1}{f}\left(1-\frac{3r_0}{2r}\right),$$
$$C = \frac{1}{f}\left\{\frac{r_0}{r}\left(1-\frac{9r_0}{4r}\right)\right\}^{1/2}. \tag{21. 16}$$

После этого коэффициенты Ламэ, определенные согласно (21. 12), запишутся

$$h^{(s)}_k = A\delta^s_k + (B+v)\,n^s n_k - CE^{sm}_{k\cdot\cdot}n_m, \qquad h^{(0)}_0 = f,$$
$$h^k_{(s)} = A\delta^k_s + (f-A)\,n^k n_s + CE^{km}_{s\cdot\cdot}n_m, \qquad h^0_{(0)} = 1/f, \tag{21. 17}$$

остальные компоненты равны нулю. Вычислим теперь компоненты метрического тензора согласно (18. 1):

$$g_{kl} = \eta_{ab}h^a_k h^b_l = \eta_{pq}h^{(p)}_k h^{(q)}_l = -\delta_{pq}h^{(p)}_k h^{(q)}_l =$$
$$= -A^2\delta_{kl} - [(A+B+v)^2 - A^2]\,n_k n_l - C^2E^{sp}_{k\cdot\cdot}E^q_{ls\cdot}n_p n_q. \tag{21. 18}$$

Далее легко показать, что

$$E^{sp}_{k\cdot\cdot}E^q_{ls\cdot}n_p n_q = \delta_{kl} - n_k n_l,$$

тогда предыдущее выражение принимает вид

$$g_{kl} = -(A^2+C^2)\,\delta_{kl} - [(A+B+v)^2 - (A^2+C^2)]\,n_k n_l.$$

Учитывая равенства (21. 15) и (21. 10), окончательно находим

$$g_{kl} = -\delta_{kl} - \frac{2r_0}{r-2r_0}\,n_k n_l, \qquad g_{00} = 1-\frac{2r_0}{r}, \tag{21. 19}$$

остальные компоненты равны нулю. Мы получили выражения для компонент шварцшильдовой метрики в квазидекартовых координатах. Переходя обычным путем от квазидекартовых координат к «сферическим», придем к хорошо известным значениям компонент (15. 13).

Воспользовавшись полученными результатами, вычислим компоненты 4-вектора энергии-импульса гравитационного поля.

Тензор энергии-импульса гравитационного поля мы можем выразить через суперпотенциал из уравнения поля (21. 1). Этим уравнением теперь можно пользоваться, так как потенциалы (21. 17) удовлетворяют условию калибровки. Тогда

$$t^{\cdot\mu}_a = -\frac{c^4}{4\pi\varkappa}\nabla_\sigma\gamma^{\mu\sigma}_{a,\cdot\cdot} = -\frac{c^4}{4\pi\varkappa}\partial_\sigma\gamma^{\mu\sigma}_{a,\cdot\cdot}, \qquad \Lambda = 1. \tag{21. 20}$$

Согласно (20. 31б) и (21. 20), имеем

$$P_a = \frac{1}{c}\int \Lambda t_a^{\cdot \mu} dV_\mu = -\frac{c^3}{4\pi\varkappa}\int (\partial_\sigma \gamma_{a,\cdot\cdot}^{\mu\sigma})\, dV_\mu. \tag{21. 21}$$

Так как в рассматриваемом случае поля статические, то в подынтегральном выражении производная по времени исчезнет, и

$$P_a = -\frac{c^3}{4\pi\varkappa}\left\{\int (\partial_l \gamma_{a,\cdot\cdot}^{0l})\, dV_0 + \int (\partial_l \gamma_{a,\cdot\cdot}^{sl})\, dV_s\right\}. \tag{21. 22}$$

Если $r \to \infty$, то интересующие нас объекты имеют следующее асимптотическое поведение:

$$\begin{aligned} &h_\mu^a \sim h_a^\mu \sim c_1 + \frac{c_2}{r} + \ldots, \qquad && C_{\mu\nu\cdot}^{a} \sim \frac{\text{const}}{r^2} + \ldots, \\ &\gamma_{a,\cdot\cdot}^{\mu\nu} \sim \frac{\text{const}}{r^2} + \ldots, && \partial_\sigma \gamma_{a,\cdot\cdot}^{\mu\nu} \sim \frac{\text{const}}{r^3} + \ldots, \end{aligned} \tag{21. 23}$$

причем некоторые компоненты, как мы видели, с самого начала равны нулю. Учитывая такую асимптотику, можно показать, что второй интеграл в (21. 22), который берется по замкнутой двумерной поверхности, охватывающей центр и удаляющейся на бесконечность ($r \to \infty$), равен нулю [1].

Итак, для величины энергии-импульса получим следующее выражение:

$$P_a = -\frac{c^3}{4\pi\varkappa}\int (\partial_l \gamma_{a,\cdot\cdot}^{0l})\, dV_0. \tag{21. 24}$$

Пусть $a = k = 1,\ 2,\ 3$, тогда

$$\begin{aligned} \gamma_{(k)\cdot\cdot}^{0l} &= \gamma_{(k)\cdot\cdot}^{cb} h_c^0 h_b^l = \frac{1}{f}\gamma_{(k)\cdot\cdot}^{(0)(s)} h_{(s)}^l = \frac{1}{f}\eta^{qs} h_{(q)}^l \gamma_{(k),(0)(s)} = \\ &= \frac{1}{f}\eta^{qs} h_{(q)}^l \{C_{mn,(0)} h_{(k)}^m h_{(s)}^n + C_{mn,(k)} h_{(0)}^m h_{(s)}^n + \\ &+ C_{mn,(s)} h_{(0)}^m h_{(k)}^n\} = \frac{1}{f}\eta^{qs} h_{(q)}^l \Big\{C_{mn,(0)} h_{(k)}^m h_{(s)}^n + \\ &+ \frac{1}{f}[C_{0n,(k)} h_{(s)}^n + C_{0n,(s)} h_{(k)}^n]\Big\}. \end{aligned} \tag{21. 25}$$

Но в данном случае $h_{(k)}^0 = h_0^{(k)} = h_{(0)}^k = h_k^{(0)} = 0$ и, следовательно, $C_{mn,\cdot}^{(0)} = C_{m0,\cdot}^{(k)} = -C_{m0,(k)} = 0$. Отсюда следует, что

$$\gamma_{(k)\cdot\cdot}^{0l} = 0, \qquad P_{(k)} = 0. \tag{21. 26}$$

Пусть теперь в (21. 24) будет $a=0$, тогда

$$\gamma_{(0)\cdot\cdot}^{0l} = \frac{1}{f}\gamma_{(0),(0)(s)}\eta^{qs} h_{(q)}^l = \frac{2}{f}\eta^{qs} h_{(q)}^l C_{(0)(s),(0)} = \frac{2}{f^2} C_{0k\cdot}^{(0)} \eta^{qs} h_{(q)}^l h_{(s)}^k.$$

---

[1] Заметим, что dV_s, где $s=1,\ 2,\ 3$, содержит дифференциал dx^0, именно $dV_1 = dx^0 dx^2 dx^3$, $dV_2 = dx^0 dx^3 dx^1$, $dV_3 = dx^0 dx^1 dx^2$, в подходящей координатной сетке. Однако дополнительное интегрирование по x^0 для второго интеграла уже ничего не дает.

Воспользовавшись (21. 16) и (21. 17), находим

$$\gamma^{0l}_{(0)\cdot\cdot} = -\frac{df}{dr} n^l = -\frac{r_0}{r^2 f} n^l. \tag{21.27}$$

Подставляя это в (21. 24) и переходя к интегралу по замкнутой поверхности, получим

$$P_{(0)} = -\frac{c^3}{4\pi\varkappa} \oint\limits_{(S\to\infty)} \gamma^{0l}_{(0)\cdot\cdot} dS_l = \frac{c^3 r_0}{4\pi\varkappa f} \oint\limits_{(S\to\infty)} d\omega, \tag{21.28}$$

где мы использовали соотношение

$$dS = n^l dS_l = r^2 d\omega;$$

здесь $d\omega$ — элемент телесного угла. Интегрирование (21. 28) дает

$$P_{(0)} = \frac{c^3 r_0}{\varkappa} = mc, \qquad E = cP_{(0)} = mc^2. \tag{21.29}$$

Этот результат, как мы уже отмечали, не зависит от выбора координатной сетки.

Теперь возникает вопрос: к какой системе отсчета относятся результаты (21. 29)? Подобные результаты в механике Ньютона или в СТО указывали бы на систему отсчета, связанную с центром масс физической системы. В случае ОТО мы даже еще не определили, что следует понимать под системой отсчета, особенно неинерциальной, и как ее описывать. Этот вопрос оказывается не таким простым и до сих пор не имеет удовлетворительного решения. В подавляющем большинстве случаев система отсчета отождествляется с координатной сеткой, приводя к дополнительным трудностям и неясностям при попытках физической интерпретации результатов. Мы специально рассмотрим эти вопросы в последних двух главах.

Вычислим теперь момент количества движения центрально-симметричного гравитационного поля. Согласно (20. 31) и (20. 31б) запишем

$$S_{(k)(l)} = \frac{1}{c} \int \Lambda S^{\sigma}_{(k)(l)\cdot} dV_\sigma = \frac{c^3}{2\pi\varkappa} \left\{ \int C^0_{(k)(l)\cdot} dV_0 + \int C^p_{k)(l)\cdot} dV_p \right\}. \tag{21.30}$$

Для подынтегрального выражения первого слагаемого находим

$$C^0_{(k)(l)\cdot} = \frac{1}{f} C^{(0)}_{pq\cdot} h^p_{(k)} h^q_{(l)} = 0. \tag{21.31}$$

Так как все $h^{(0)}_p = 0$, то и $C^{(0)}_{pq\cdot}$ также обращаются в нуль, а отсюда вытекает результат (21. 31).

Полагая, как обычно,

$$dV_p = n_p dS dx^0, \qquad dS = r^2 d\omega, \qquad d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi, \tag{21.32}$$

имеем

$$C^p_{(k)(l)\cdot} dV_p = C^p_{(k)(l)\cdot} n_p dS dx^0; \tag{21.33}$$

таким образом,

$$C^{m}_{(k)(l)\cdot}n_m = C^{(s)}_{pq\cdot}h^{p}_{(k)}h^{q}_{(l)}h^{m}_{(s)}n_m. \tag{21.33a}$$

Воспользовавшись (21. 17), а также равенствами (21. 5), находим

$$C^{(s)}_{pq\cdot} = -\left\{A' - \frac{1}{r}(B+v)\right\}\delta^{s}_{[p}n_{q]} + r\left(\frac{C}{r}\right)' E^{sk}_{\cdot\cdot[p}n_{q]}n_k - \frac{C}{r}E^{s}_{pq\cdot}; \tag{21.34}$$

подставляя в (21. 33а), получим

$$C^{m}_{(k)(l)\cdot}n_m = -\frac{fC}{r}E^{s}_{kl\cdot}n_s. \tag{21.35}$$

После этого мы можем записать интегральное выражение для момента

$$S_{(k)(l)} = \frac{c^3 fr}{2\pi\varkappa}C\oint E^{s}_{kl\cdot}n_s d\omega dx^0 = 0, \tag{21.36}$$

где по определению

$$n_s = \begin{cases} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{cases}.$$

Таким образом, полный момент количества движения поля Шварцшильда равен нулю. Этот результат в силу сферической симметрии поля, как кажется, можно было ожидать с самого начала. Здесь уместно, однако, поставить вопрос о том, насколько однозначным является полученный результат?

В обычной метрической формулировке ОТО определение тензора плотности момента, в сущности, копируется со случая плоского пространства (случай СТО). Например, в [9] дается следующее выражение:

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu,\sigma} &= \frac{1}{c}(-g)\{x^{\mu}\tilde{\Theta}^{\nu\sigma} - x^{\nu}\tilde{\Theta}^{\mu\sigma}\}, \\ \tilde{\Theta}^{\mu\nu} &= T^{\mu\nu} + \tilde{t}^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{21.37}$$

которое не является тензором относительно группы (A) по следующим причинам: во-первых, $\tilde{t}^{\mu\nu}$ — не тензор и, во-вторых, компоненты x^{μ} не образуют общековариантного вектора, так как в римановых многообразиях не существует радиуса-вектора. Выражение (21. 37) зависит, следовательно, от случайного выбора координатной сетки, а потому оно, несмотря на внешний вид, не может быть с физической точки зрения интерпретировано как момент. Это, однако, не исключает того, что в некоторых системах координат выражение (21. 37) может дать численно правильный результат.

В случае тетрадной формулировки ОТО все ее результаты, как мы видели, общековариантны относительно группы (A), так что с этой стороны все результаты будут однозначны. Неодно-

значность может возникнуть в результате преобразований группы ($\bar{B}$), относительно которой ни $t_a^{\cdot\mu}$, ни S_{ab}^{σ}. не являются тензорами. Возможный смысл этой неоднозначности мы рассмотрим в главе III.

22. Гравитационные волны

Как известно, в случае слабого гравитационного поля, когда метрический тензор, а также и коэффициенты Ламэ, мало отличаются от их галилеевых значений, эти малые добавки (возмущения) удовлетворяют обычному волновому уравнению, к которому сводится уравнение Эйнштейна, записанное в виде (15. 7) или (19. 22), для случая $T^{\mu\nu}=0$. Следовательно, слабое нестационарное гравитационное поле может существовать в виде гравитационных волн, распространяющихся в вакууме со скоростью света.

Если сравнивать гравитационное излучение с электромагнитным, то качественно оно соответствует квадрупольному электромагнитному излучению. Это связано с тем, что «гравитационный заряд» $e_g=\sqrt{\varkappa}\,m$ существует только одного знака, следовательно, ни дипольного момента, ни соответствующего ему излучения не будет.

Другой отличительной особенностью является то, что здесь не будет также гравитационного квазимагнитного дипольного излучения, ибо отношение «гравитационного заряда» к массе $e_g/m=\sqrt{\varkappa}$ для всех тел одно и то же, равное квадратному корню из гравитационной постоянной.

Наибольший интерес для теории сейчас, по-видимому, представляют исследования точных решений уравнений Эйнштейна, пригодных как в случае сильных, так и слабых гравитационных полей. При этом возникают следующие вопросы:

1. Как отличить решение, описывающее только гравитационные волны (излучение), от решения, описывающего общее гравитационное поле в вакууме?
2. Каковы энергия-импульс и момент количества движения, переносимые волнами?
3. Каков характер фронта волны?
4. Каковы свойства потока гравитационных лучей?

В случае электродинамики ответить на подобные вопросы не составляет принципиальных трудностей. В случае ОТО, т. е. в искривленном пространстве, эти вопросы чрезвычайно усложняются и однозначных ответов на некоторые из них мы до сих пор не имеем.

Так, например, мы будем говорить о плоских волнах, однако понимать это следует чисто условно, так как в отличие от СТО произвольные координаты x^{μ} здесь не имеют непосредственного ни метрического, ни физического смысла.

Например, если в СТО в галилеевых координатах X^a выражение

$$\psi=k_aX^a, \qquad k_ak^a=0 \tag{22. 1}$$

инвариантным (и даже общековариантным) образом определяет плоский фронт электромагнитной волны, то в ОТО подобное выражение уже не является инвариантом, ибо компоненты x^μ не образуют вектора, и, следовательно, такое выражение вообще не определяет какую-либо фазу.

Ниже мы рассмотрим только первые два вопроса из отмеченных выше, так как именно здесь тетрадная формулировка ОТО дает значительно больше, чем обычная — метрическая.

Отсутствие тензора энергии гравитационного поля в метрической формулировке ОТО, а также трудности интерпретации решений уравнений Эйнштейна привели к тому, что в исследованиях стали очень широко пользоваться аналогией, в некоторых случаях весьма далекой, с электродинамикой. Поэтому мы кратко остановимся сначала на тех вопросах электродинамики, аналогией с которыми пользуются при исследовании гравитационного поля.

Так как мы рассматриваем случай СТО, то можем воспользоваться галилеевой системой координат

$$x,\ y,\ z \sim X^k, \qquad ct = X^0,$$
$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \operatorname{diag}\{+1,\ -1,\ -1,\ -1\}. \tag{22.2}$$

Уравнения Максвелла для поля в пустоте запишутся

$$\partial_b F_a^{\cdot b} = 0, \qquad \eta^{cd}\partial_c\partial_d F_{ab} = 0, \qquad F_{ab} = 2\partial_{[a}A_{b]}. \tag{22.3}$$

4-вектор потенциал удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\partial_c A^c = 0, \qquad \eta^{bc}\partial_b\partial_c A_a = 0. \tag{22.4}$$

Тензор энергии-импульса и его закон сохранения представляются таким образом:

$$T_{ab} = -\frac{1}{4\pi}\left\{F_{ac}F_{b\cdot}^{c} - \frac{1}{2}\eta_{ab}L\right\}, \qquad \partial_b T_a^b = 0, \tag{22.5}$$

где L — первый инвариант электромагнитного поля, он же — функция Лагранжа. Обозначим через L^* второй инвариант, тогда

$$L = \frac{1}{2}F_{ab}F^{ab} = -(E^2 - H^2), \qquad L^* = \frac{1}{4}E^{abcd}F_{ab}F_{cd} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{H}. \tag{22.6}$$

Интегральные законы сохранения имеют вид

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = c\oint\limits_{(S\to\infty)} T_0^l dS_l, \qquad \frac{\partial P_k}{\partial t} = -\oint\limits_{(S\to\infty)} T_k^l dS_l, \tag{22.7}$$

где полная энергия W и импульс P_k системы определены обычным образом

$$W = \int T_0^0 dV_0, \qquad P_k = \frac{1}{c}\int T_k^0 dV_0. \tag{22.8}$$

Поставим теперь следующий вопрос: по каким признакам можно судить о том, присутствует излучение в данном электромагнитном поле в вакууме или нет? Здесь могут встретиться три возможности.

1. Пусть электромагнитное поле порождается пространственно ограниченной системой. Тогда, вычисляя поток энергии через замкнутую поверхность, охватывающую систему, мы получим значение интеграла в первом из равенств (22. 7). Если его значение не равно нулю, то система излучает, в противном случае излучения нет.

2. Пусть в пространстве имеется только электромагнитное излучение в виде плоских волн. В этом случае предыдущий интегральный признак ничего не дает, так как интеграл будет расходящимся. Поэтому следует рассмотреть локальные свойства поля.

Запишем вектор-потенциал плоской электромагнитной волны в следующем виде:

$$A_a = A_a(\psi), \qquad \psi = k_a X^a, \tag{22. 9}$$

подставляя это в уравнения (22. 3) и (22. 4), находим

$$F_{ab} = 2k_{[a}\dot{A}_{b]}, \qquad k_c \dot{A}^c = k_c \ddot{A}^c = 0, \qquad k_a k^a = 0, \qquad \dot{A}_a \equiv \frac{dA_a}{d\psi}, \tag{22. 10}$$

т. е. волновой вектор k_a является изотропным. Непосредственным вычислением приходим к выводу, что оба инварианта поля (22. 6) равны нулю. Это значит, что для плоской волны в пустоте имеет место следующее:

$$|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|, \qquad \mathbf{E} \perp \mathbf{H}.$$

Вычисляем тензор энергии (22. 5) с учетом равенств (22. 10)

$$T_{ab} = \left(-\frac{1}{4\pi}\dot{A}_c \dot{A}^c\right) k_a k_b. \tag{22. 11}$$

Изотропность вектора k_a приводит к следующим свойствам тензора энергии-импульса: во-первых,

$$T_{ac} T^c_b = 0, \qquad T^c_a k_c = 0, \tag{22. 12}$$

и, во-вторых, не существует такой лоренцевой системы отсчета, в которой T_{ab} имел бы диагональный вид [1]. Следовательно, в (22. 11) всегда будут присутствовать компоненты потока энергии.

3. Пусть электромагнитное поле не является полем излучения и интеграл в первом из равенств (22. 7) расходится. Тогда свойства поля также следует рассмотреть локально. В этом случае, как известно, либо оба, либо один из инвариантов (22. 6) отличен от нуля. Значит, можно найти такую лоренцеву систему отсчета, относительно которой T_{ab} будет диагонален, т. е. компоненты плотности потока энергии T_{0k} обратятся в нуль. Это можно интерпретировать в некоторых случаях как переход в сопутствующую потоку систему отсчета. Кроме того, $T_{0c}T^c_0 \neq 0$, следовательно, вектор плотности потока энергии не изотропен.

---

[1] Это связано с тем, что для изотропного вектора нельзя найти такую тетраду, относительно которой он имел бы только одну отличную от нуля компоненту.

Конечно, получить ответы на подобные вопросы можно гораздо проще — проанализировав фазу и асимптотическое поведение компонент поля. Мы рассмотрели эти вопросы в таком аспекте, имея в виду дальнейшие приложения в гравитации.

Перейдем теперь к рассмотрению гравитационного излучения. Остановимся сначала кратко на ситуации, имеющей место в метрической формулировке ОТО.

Здесь сразу возникает ряд вопросов, часть которых характерна именно для метрической формулировки ОТО. Перечислим их.

1. Что, собственно, должно излучаться: метрика или часть ее, кривизна пространства-времени или еще что-либо?

2. Что должно служить при этом носителем энергии?

3. Что заставляет на больших расстояниях, например от пульсирующей звезды, галилееву метрику и кривизну пространства-времени слегка изменяться?

4. Какая причина заставляет изменять характер движения пробной частицы?

Совершенно ясно, что причиной является некоторое возмущение, пришедшее от пульсирующей звезды. Хочется назвать это возмущение гравитационным полем, излученным пульсирующей звездой. Но, как мы уже отмечали, в обычной трактовке ОТО никакого гравитационного силового поля нет и нет подходящих геометрических объектов, с помощью которых можно было бы описать это поле. Нет также тензора, с помощью которого можно было бы описать перенос энергии и импульса этими возмущениями. Есть, правда, псевдотензоры разного вида, но именно потому, что они псевдотензоры, а не тензоры, им не может быть дана ясная физическая интерпретация, а результаты, полученные при их помощи, будут зависеть от случайного выбора пространственно-временнóй сетки.

Все это заставляет при анализе гравитационного излучения использовать различные косвенные признаки и аналогию с электродинамикой. Все признаки или так называемые инвариантные критерии наличия или отсутствия излучения, которыми пользуются в метрической формулировке ОТО, так или иначе связаны с тензором кривизны [39].

Так, например, Лихнерович [43] показал, что если существует такой изотропный вектор k^μ, при котором выполняются соотношения

$$k^\mu R_{\mu\nu\sigma\lambda}=0, \qquad k_\tau R_{\mu\nu\sigma\lambda}+k_\mu R_{\nu\tau\sigma\lambda}+k_\nu R_{\tau\mu\sigma\lambda}=0, \tag{22. 13}$$

то тензор Риччи будет представлен в следующем виде:

$$R_{\mu\nu}=\rho k_\mu k_\nu. \tag{22. 13а}$$

Тогда если $\rho=0$, то в пространстве имеется только гравитационное излучение; если $\rho\neq 0$, имеем общий случай. Мы видим здесь некоторую аналогию со случаем (22. 11) и (22. 12) электромагнитного излучения.

Другой критерий был предложен в работах [22], [23] и затем уточнен в работе [24]; он гласит, что если тензор кривизны удовлетворяет общековариантному волновому уравнению, то в пространстве присутствует только гравитационное излучение

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta R_{\mu\nu\sigma\lambda} = 0. \tag{22.14}$$

Здесь тоже видна аналогия с электромагнитным полем — компоненты напряженности поля электромагнитного излучения удовлетворяют волновому уравнению.

Центральное место среди подобных критериев занимает метод Пирани [25]. Он основывается на аналогии между каноническими формами тензора энергии электромагнитного поля и тензора Римана, при этом используется известная алгебраическая классификация тензора кривизны, данная Петровым [26].

На этом пути получен ряд интересных результатов, однако к этим результатам следует относиться с осторожностью. Действительно, в то время как тензор энергии электромагнитного поля в силу своего определения однозначно указывает на наличие или отсутствие излучения, тензор Римана такой непосредственной связи с гравитационным полем и, в частности, с излучением, как мы уже отмечали, не имеет.

Более последовательным было бы рассмотреть гравитационное излучение, также опираясь на соответствующий тензор энергии. Однако в метрической формулировке теории тяготения построить общековариантный тензор энергии гравитационного поля, как известно, невозможно.

Мы рассмотрим вопросы гравитационного излучения, используя тензор энергии гравитационного поля (19. 24), полученный в тетрадной формулировке ОТО, при этом будем различать три случая [27], [28] в полной аналогии с электродинамикой. Аналогия здесь проводится совершенно естественно по причинам, которые мы не раз отмечали.

1. Источник гравитационного поля имеет ограниченные пространственные размеры. Тогда закон сохранения (20. 31а) нам дает

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint\limits_{(S\to\infty)} \Lambda t_{\cdot(0)}^{\cdot l} dS_l, \qquad W = \int \Lambda t_{\cdot(0)}^{\cdot 0} dV_0. \tag{22.15}$$

Следовательно, если поток энергии через замкнутую поверхность отличен от нуля, то излучение существует. Имеем полную аналогию с первым случаем электромагнитного поля.

2. Пусть в пространстве присутствует только поле излучения. Тогда $t_{\cdot(0)}^{\cdot\mu}$ — 4-вектор плотности энергии и ее потока должен быть изотропным аналогично (22. 12), т. е.

$$g_{\mu\nu} t_{\cdot(0)}^{\cdot\mu} t_{\cdot(0)}^{\cdot\nu} = 0; \tag{22.16}$$

это условие и является инвариантным критерием наличия в пространстве только гравитационного излучения.

3. Допустим условие (22. 16) не выполняется и невозможно сделать заключение о конечных размерах источника, и, следовательно, условие (22. 15) неприменимо. Тогда либо поля излучения нет, либо мы имеем общий случай гравитационного поля. Исследование здесь надо проводить тоже локально, однако выводы при этом не будут столь четкими, как в ранее рассмотренных вопросах.

Если бы уравнения поля были линейными, то хотя бы в некоторых случаях можно было говорить о существовании двух независимых потоков энергии: одного, связанного с излучением, когда скорость переноса энергии равна скорости света, и который поэтому должен присутствовать в любой системе отсчета; другого – с остальным полем, когда скорость переноса энергии меньше скорости света [1]. Последний поток можно было бы обратить в нуль переходом в локальную сопутствующую потоку систему отсчета; тогда в этой системе осталось бы только поле излучения, если, конечно, оно присутствовало с самого начала.

В действительности такое разделение потока в случае гравитации невозможно. Ввиду нелинейности уравнений гравитационного поля, не только потоки, но и сами поля разделить не представляется возможным. В электродинамике, в силу линейности уравнений Максвелла, поля различного типа всегда могут быть разделены, однако с потоками, при квадратичной зависимости их от компонент поля, это можно сделать далеко не всегда.

Таким образом, с достоверностью мы можем пока утверждать только следующее: независимо от того, присутствует в данном поле излучение или нет, вектор плотности потока энергии $t^{\cdot\mu}_{(0)}$ не будет изотропным.

Рассмотрим теперь ряд конкретных примеров. Все рассматриваемые ниже метрики являются решением уравнений Эйнштейна с равной нулю правой частью.

1. Аксиально симметричная система пространственно ограниченных источников гравитационного поля [29]. В системе координат

$$x^{\mu} \sim \{x,\ y,\ z,\ t\}, \qquad c = 1, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta \tag{22.17}$$

асимптотическое выражение для метрики имеет следующий вид:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu} r^{-1} + \beta_{\mu\nu} r^{-2} + \ldots,$$
$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,\{+1,\ -1,\ -1,\ -1\}. \tag{22.18}$$

---

[1] Подобно потоку энергии, переносимой движущимися массами. В нашем случае такой поток отсутствует, ибо мы рассматриваем гравитационное поле в пустоте.

Используя вспомогательные векторы

$$
\begin{aligned}
& n_k=\frac{\partial r}{\partial x^k}=\frac{x^k}{r}, \qquad n_\sigma=\left\{\frac{x^k}{r};\ 0\right\}, \qquad k=1,\ 2,\ 3, \\
& m_\sigma=\left\{\frac{1}{r}\,\frac{\partial x^k}{\partial \theta};\ 0\right\}, \\
& l_\sigma=\left\{\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial x^k}{\partial \varphi};\ 0\right\}, \qquad \mu_\sigma=\left\{-\frac{\partial r}{\partial x^k};\ 1\right\},
\end{aligned} \tag{22. 19}
$$

коэффициенты $\alpha_{\mu\nu}$ и $\beta_{\mu\nu}$ входящие в (22. 18), можно выразить следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{\mu\nu} &= 2C\,(m_\mu m_\nu - l_\mu l_\nu) + 2M\mu_\mu\mu_\nu + \\
&\quad + (\partial_\theta C + 2C\operatorname{ctg}\theta)\,(m_\mu\mu_\nu - m_\nu\mu_\mu), \\
\beta_{\mu\nu} &= 2C^2\,(m_\mu m_\nu + l_\mu l_\nu) + \frac{1}{2}\,C^2\,(\mu_\mu n_\nu + \mu_\nu n_\mu) + \\
&\quad + (\partial_\theta N + N\operatorname{ctg}\theta)\,\mu_\mu\mu_\nu - (2N + C\partial_\theta C)\,(m_\mu\mu_\nu - m_\nu\mu_\mu),
\end{aligned} \tag{22. 20}
$$

где C, N и M — действительные функции переменных $u=r-t$, θ, связанные соотношениями

$$
\begin{aligned}
\partial_u M &= \frac{1}{2}\,\partial_u A - (\partial_u C)^2, \\
-3\partial_u N &= \partial_\theta M + 3C\partial_u\partial_\theta C + 4C\operatorname{ctg}\theta\partial_u C + \partial_u C\partial_\theta C, \\
A &= \partial_\theta^2 C + 3\operatorname{ctg}\theta\partial_\theta C - 2C;
\end{aligned} \tag{22. 21}
$$

здесь $\partial_u C$ — так называемая «функция информации» системы, M играет роль шварцшильдовского аналога массы. Поскольку данное решение, как это видно из (22. 18), описывает ограниченные источники, то оно относится к первому случаю. Поэтому, чтобы выяснить вопрос о наличии излучения, достаточно, согласно (22. 15), вычислить полный поток энергии через удаленную замкнутую поверхность. Тетрады, удовлетворяющие условию калибровки (18. 3), имеют вид

$$
h^\mu_a = \delta^\mu_a - \frac{1}{2}\,\alpha^\mu_{\cdot a} r^{-1} - \frac{1}{2}\,(\beta^\mu_{\cdot a} - \alpha^\mu_{\cdot b}\alpha^{\cdot b}_a + \gamma^\mu_{\cdot a})\,r^{-2} + \ldots, \tag{22. 22}
$$

где

$$
\gamma^\mu_{\cdot a} = b\,(\mu^\mu n_a - \mu_a n^\mu), \qquad \partial_u b = \frac{1}{2}\,(2M - A - C\partial_u C). \tag{22. 23}
$$

Выполнив необходимые вычисления, для тензора энергии-импульса получим следующее выражение:

$$
t^{\cdot\mu}_a = -\frac{c^4}{2\pi\varkappa}\,\gamma^{b,\,d\mu}C_{da,\,b} = \frac{c^4}{2\pi\varkappa r^2}\,(\partial_u C)^2\,\mu_a\mu^\mu. \tag{22. 24}
$$

Тогда искомый поток энергии принимает вид (здесь $c=1$)

$$-\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{1}{\varkappa}\int_0^\pi (\partial_u C)^2 \sin\theta d\theta, \tag{22.25}$$

что совпадает с результатами работы [29] и подтверждает роль «функции информации» $\partial_u C$ для данного решения. В случае обращения этой функции в нуль излучение в системе отсутствует. Вычисляя 4-вектор энергии-импульса, согласно формуле

$$P_a=\frac{1}{c}\int \Lambda t_a^{\cdot\sigma} dV_\sigma=-\frac{c^3}{4\pi\varkappa}\int \partial_\lambda \{\Lambda \gamma_a^{\cdot\lambda\sigma}\}\, dV_\sigma,$$

находим

$$\begin{gathered}P_a=\{0,\ 0,\ P_z,\ W\}, \qquad P_z=\frac{1}{\varkappa}\int_0^\pi M\cos\theta\sin\theta d\theta,\\ W=-\frac{1}{\varkappa}\int_0^\pi M\sin\theta d\theta.\end{gathered} \tag{22.26}$$

Результаты (22. 25) и (22. 26) совпадают с результатами Меллера, полученными с помощью псевдотензора; последние, конечно, зависят от выбора координатной сетки, в то время как результаты, приведенные здесь, являются общековариантными. Их совпадение обусловлено удачным выбором координатной сетки, в которой такие же результаты получаются даже при использовании псевдотензора Эйнштейна. Однако после произвольных преобразований координат совпадения результатов уже не будет. Более того, выражения Эйнштейна и Меллера могут принять при этом любое наперед заданное значение.

2. Рассмотрим «плоские волны» Бонди [30]. Метрика здесь имеет вид

$$\begin{aligned}ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-dt^2-2\beta(ydy-zdz)\,du+\\ +[(t^2-x^2)\beta^2-2u^{-1}(y^2-z^2)\beta]\,du^2,\end{aligned} \tag{22.27}$$

где $\beta(u)$ — произвольная функция, $u=x+t$. Для того чтобы метрика оставалась везде регулярной, функция $\beta(u)$ должна удовлетворять условиям

$$\beta/u \to \text{const}, \quad u\to 0, \qquad \beta^2u^2\to\text{const}, \quad u\to\pm\infty.$$

Введем следующие обозначения:

$$A=(t^2-x^2-y^2-z^2)\beta^2+2u^{-1}(y^2-z^2)\beta, \qquad \Omega=\int \beta^2 u du$$

и определим вспомогательные векторы

$$\begin{aligned}&n_\nu=n^\nu=\{-1,\ 0,\ 0,\ 0\}, \qquad m_\nu=m^\nu=\{0,\ 0,\ 1,\ 0\},\\ &l_\nu=l^\nu=\{0,\ 1,\ 0,\ 0\},\\ &\mu_\nu=\{1,\ 0,\ 0,\ 1\}, \qquad \mu^\nu=\{1,\ 0,\ 0,\ -1\}.\end{aligned}$$

Тогда тетрады, удовлетворяющие условию калибровки (18. 3), запишутся

$$h^{\nu}_{a} = -\frac{1}{2}(Ae^{-\Omega} + e^{-\Omega} + e^{\Omega})\mu^{\nu}\mu_{a} - e^{\Omega}\mu^{\nu}n_{a} + \beta y e^{-\Omega} l^{\nu}\mu_{a} -$$
$$- \beta z e^{-\Omega} m^{\nu}\mu_{a} - e^{-\Omega} n^{\nu}\mu_{a} + m^{\nu}m_{a} + l^{\nu}l_{a}. \qquad (22.\,28)$$

С их помощью получаем

$$t^{\cdot\nu}_{a} = \frac{1}{2\pi\varkappa}\mu_{a}\{\mu^{\nu}(2\beta\beta' u + 3\beta^{2}) - \eta^{\nu\lambda}\partial_{\lambda}(\beta^{2}u)\}e^{-\Omega}, \qquad \beta' = \partial_{u}\beta. \qquad (22.\,29)$$

Здесь вектор $t^{\cdot\nu}_{(0)}$ — изотропен. Следовательно, согласно пункту (2) теории (см. стр. 94), данное решение описывает только гравитационное излучение.

Рассмотрим случай, когда $\beta(u)$ отлична от нуля только внутри интервала $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$. Это соответствует волновому пакету конечной толщины. Энергия, содержащаяся внутри параллелепипеда с площадью основания $dydz$, определяется следующим образом:

$$dW = -\int \Lambda t^{\cdot 0}_{(0)} dV_0 = \frac{1}{2\pi\varkappa}\, dydz \int\limits_{u_1}^{u_2} \beta^{2} e^{-\Omega} du. \qquad (22.\,30)$$

Энергия пакета, прошедшая через элемент поверхности $d\sigma$, расположенный в фиксированном месте системы отсчета перпендикулярно оси x, будет

$$c\int\limits_{t_1}^{t_2} \Lambda t^{\cdot k}_{(0)} d\sigma_{k} dt = c\,dW. \qquad (22.\,31)$$

Заметим, что аналогичные вычисления с помощью псевдотензоров Эйнштейна, Меллера и Пеллегрини—Плебаньского приводят к нулевым значениям для (22. 30) и (22. 31). В данном случае эти выражения отличны от нуля, следовательно, в согласии с первым случаем электромагнитного поля, это также указывает на наличие излучения.

3. Рассмотрим решение, найденное Такено [31]. Интервал здесь имеет следующий вид:

$$ds^{2} = (\gamma - \rho)\, dx^{2} + \alpha dy^{2} + 2\delta dydz + \beta dz^{2} -$$
$$- 2\rho dxdt - (\gamma + \rho)\, dt^{2}, \qquad (22.\,32)$$

где α, β, φ, δ, ρ — функции только от $u = x + t$, $c = 1$. Тетрады, удовлетворяющие условиям калибровки, можно записать таким образом:

$$h^{\nu}_{a} = \frac{\rho - \gamma - \gamma^{2}M^{2}}{2\gamma^{2}M}\mu^{\nu}\mu_{a} - \mu^{\nu}n_{a} - \frac{1}{\gamma M}n^{\nu}\mu_{a} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}m^{\nu}m_{a} +$$
$$+ \frac{\sqrt{\beta}}{M}l^{\nu}l_{a} - \frac{\delta}{M\sqrt{\beta}}m^{\nu}l_{a}, \qquad M^{2} = \alpha\beta - \delta^{2}. \qquad (22.\,33)$$

Вычисляя с помощью (22. 33) тензор энергии-импульса, находим

$$t_a^{\cdot\nu} = \frac{1}{2\pi\varkappa}\left(\frac{M'}{\gamma M}\right)' \mu_a\mu^\nu, \qquad M' = \partial_u M. \tag{22. 34}$$

Мы видим, что вектор $t_{(0)}^{\cdot\nu}$ — изотропен (так как вектор μ^ν, по определению, изотропен); в этом случае существует только гравитационное излучение.

Результаты, полученные с помощью инвариантных критериев (22. 13) и (22. 14), совпадают с результатами тетрадной теории только в случае пространств типа N. Для других типов пространств эти критерии вообще не дают никакой информации. Результаты инвариантной теории Пирани и тетрадной всегда совпадают.

Глава III

АНАЛИЗ ТРУДНОСТЕЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

23. Трудности метрической формулировки

В общей теории относительности сложилась своеобразная, не имеющая себе аналога ситуация, разобраться в которой физики до сих пор еще не в состоянии. Своеобразие состоит в том, что в теории, принципы которой сформулированы безукоризненно в математическом отношении, некоторые важные физические следствия находятся в противоречии с исходными положениями.

Так, например, при формулировке ОТО постулируется допустимость любых координат, однако в построенной теории оказалось, что все динамические характеристики гравитационного поля (кроме уравнений Эйнштейна) — плотность энергии, импульса и момента количества движения — описываются нетензорными величинами. Вследствие этого невозможно однозначно описать распределение энергии-импульса любой физической системы, находящейся в гравитационном поле. Отсюда и возникает понятие о так называемой «нелокализуемости» гравитационного поля.

Следует подчеркнуть всю серьезность этой трудности, которая не исчезла бы даже тогда, когда удалось бы (допустим!) найти вместо псевдотензора $t^{\mu\nu}$ настоящий тензор энергии. Действительно, закон сохранения

$$\partial_\sigma \{\sqrt{-g}\,(T^{\mu\sigma} + t^{\mu\sigma})\} = 0, \qquad (23.1)$$

как известно, общековариантен, хотя расходимость взята нековариантная. Здесь происходит компенсация нековариантности расходимости нековариантностью $t^{\mu\nu}$. Предположим теперь, что мы нашли настоящий тензор $\tilde{t}^{\mu\nu}$, но тогда для ковариантности закона сохранения необходимо обращение в нуль ковариантной расходимости

$$\nabla_\sigma \{T^{\mu\sigma} + \tilde{t}^{\mu\sigma}\} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\sigma \{\sqrt{-g}\,(T^{\mu\sigma} + \tilde{t}^{\mu\sigma})\} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\,(T^{\sigma\lambda} + \tilde{t}^{\sigma\lambda}) = 0, \qquad (23.2)$$

однако это выражение снова перестает быть законом сохранения, как и в случае (16.1).

Таким образом, в принципе мы можем иметь: либо $t^{\mu\nu}$ — не тензор, тогда закон сохранения (23.1) будет общековариантен,

либо $\tilde{t}^{\mu\nu}$ — тензор, но тогда $(T^{\mu\nu}+\tilde{t}^{\mu\nu})$ не будет сохраняться. Тот и другой случай неприемлем с физической точки зрения.

Как известно, стремление получить закон сохранения с помощью обычной (нековариантной) расходимости основано на том, что после интегрирования такого выражения по обычному объему, в случае пространственно ограниченной системы, можно получить выражение вида

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int \sqrt{-g}\,(T^{00}+t^{00})\,dV=0, \qquad (23.3)$$

которое, как полагают, описывает сохранение во времени некоторого интеграла. Это соответствует попыткам полностью перенести в ОТО процедуру получения интегральных законов сохранения из СТО. Но если в галилеевых координатах СТО координата $x^0=ct$ действительно имеет смысл времени, а компонента T^{00} — смысл плотности энергии, то в случае произвольной координатной сетки (не важно где — в СТО или ОТО) этот смысл теряется и предыдущее выражение уже нельзя, вообще говоря, истолковать как интегральный закон сохранения энергии. Более того, в ОТО сам интеграл не будет иметь определенного значения, ибо интегрирование тензорных выражений в римановом пространстве не определено. Однозначный результат может быть получен только при интегрировании скаляра и в тех тривиальных случаях, когда интегрирование ведется по бесконечно удаленной поверхности, где пространство уже плоское.

Другой нерешенной проблемой ОТО, теснейшим образом связанной с возможностью физической интерпретации аппарата ОТО, является определение неинерциальных систем отсчета (НСО). В исследованиях постоянно пользуются понятием «система отсчета», при этом обращаются с ним так, как будто точно известно, что это такое. В действительности же слова «система отсчета» и «система координат» (координатная сетка) употребляются почти всегда как равнозначные, поэтому в литературе можно встретить как инерциальные, так и ускоренные и даже свободно падающие системы координат.

К проблеме описания систем отсчета мы еще вернемся, а сейчас рассмотрим, в каком виде предстают отмеченные выше трудности при переходе к ортогональным реперам.

24. Трудности тетрадной формулировки

Использование коэффициентов Ламэ h^{μ}_{a} в качестве потенциалов гравитационного поля позволило сформулировать ОТО так, что все ее результаты (а не только уравнения поля) оказались общековариантными, т. е. ковариантными относительно преобразований группы (A).

В частности, распределение гравитационной энергии и импульса описывается общековариантным тензором t^{μ}_{a}, индексы которого

принадлежат различным многообразиям: контравариантный относится к точечному многообразию — пространству Римана, где t^{μ}_{a} ($a=0$, 1, 2, 3) преобразуются как четыре векторных поля; латинский индекс (тетрадный), остающийся инвариантным относительно группы (A), принадлежит касательному плоскому пространству, в котором располагается локальная координатная тетрада $\{O, \mathbf{h}_a\}$.

Закон сохранения имеет следующий вид:

$$\nabla_{\sigma}\Theta^{\sigma}_{a\cdot} = 0 \quad \text{или} \quad \partial_{\sigma}\{\Lambda\Theta^{\sigma}_{a\cdot}\} = 0, \qquad \Theta^{\sigma}_{a\cdot} = T^{\sigma}_{a\cdot} + t^{\sigma}_{a\cdot}. \tag{24. 1}$$

В отличие от (23. 1) здесь взята ковариантная расходимость, которая в случае вектора сводится к обычной. Тетрадный индекс как инвариантный дополнительного слагаемого не дает.

Чтобы освободиться от произвольных криволинейных компонент, не имеющих физического смысла, выразим закон сохранения (24. 1) в неголономных ортогональных координатах x^a. Учитывая условие калибровки (18. 3), сделаем небольшие преобразования. Так как

$$\partial_{\sigma}\{\Lambda h^{\sigma}_{b}\} = 0, \qquad \Theta^{\sigma}_{a\cdot} = h^{\sigma}_{b}\Theta^{b}_{a\cdot}, \qquad h^{\sigma}_{b}\partial_{\sigma} \equiv \partial_{b} = \frac{\partial}{\partial x^{b}}, \tag{24. 2}$$

то закон сохранения (24. 1) может быть записан таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^{b}}\Theta^{b}_{a\cdot} = 0, \tag{24. 3}$$

где все компоненты отнесены к локальной лоренцевой системе и, следовательно, имеют положенный им физический смысл.

Вычисление энергии, импульса и момента, согласно (20. 45), приводит к однозначному результату, так как под интегралами стоят скалярные функции. Все результаты, полученные в теории излучения, также не зависят от выбора координатной сетки. Но, несмотря на удовлетворительность этих результатов, безоговорочно их принять нельзя.

Дело в том, что все выводы, приведенные здесь, исключая лагранжиан (19. 1) и уравнения поля (19. 19), снова оказываются нековариантными, но теперь уже относительно группы ($\bar{B}$) — локальных лоренцевых преобразований. Ковариантность остается только в том случае, если коэффициенты преобразования $\omega^{a}_{\cdot b}$ — постоянные. Спрашивается, трудность это или физическое следствие?

Мы знаем, что нековариантность относительно группы (A), имеющая место в метрической формулировке ОТО, не может быть оправдана, так как физические результаты не могут зависеть от выбора способа нумерации мировых точек. Но если произвольная координатная сетка не может иметь никакого физического истолкования, то произвольное поле тетрад всегда может быть истолковано как геометрическое отображение набора локальных лоренцевых систем. Во многих работах это поле тетрад прини-

мается как геометрическое отображение НСО, а локальные лоренцевы преобразования рассматриваются как переход от одной НСО к другой [17, стр. 33].

Тогда можно попытаться оправдать нековариантность относительно группы ($\bar{B}$). Например, используя закон (17. 10) преобразования коэффициентов вращения Риччи — индукции гравитационного поля, можно специальным образом подобрать $\omega^{a}_{\cdot b}$, т. е. перейти в такую НСО, что в заданной точке все $\gamma_{\sigma,\,ab}$ обратятся в нуль. С ортодоксальной точки зрения, это можно рассматривать как проявление принципа локальной эквивалентности с гораздо бо̀льшим правом, чем исчезновение $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}$ в метрической формулировке ОТО, так как теперь $\gamma_{\sigma ab}$ — общековариантный тензор и, следовательно, не зависит от выбора координатной сетки.

Далее, нековариантность относительно группы ($\bar{B}$) тензоров $t^{\mu}_{a\cdot}$ и $S^{\mu}_{ab\cdot}$ можно пытаться объяснить тем, что переход к новой НСО — это переход к новым физическим условиям: появляются новые силы, которые вносят свой вклад в энергию, импульс и момент количества движения.

Рассмотрим в качестве примера преобразование тетрад (21. 17), описывающих поле Шварцшильда.

Уравнения Эйнштейна ковариантны относительно группы ($\bar{B}$); тогда, подвергнув тетрады (21. 17) преобразованию

$$\tilde{h}^{a}_{\mu} = \omega^{a}_{\cdot b} h^{b}_{\mu}, \tag{24. 4}$$

где $\omega^{a}_{\cdot b}$ подчинены условиям (18. 6) — сохранения калибровки, мы снова придем к решению уравнений Эйнштейна. Но так как ни $t^{\mu}_{a\cdot}$, ни $S^{\mu}_{ab\cdot}$ не являются общековариантными тензорами относительно этих преобразований, то $t^{\mu}_{a\cdot}$ и $S^{\mu}_{ab\cdot}$ получат некоторые нетензорные добавки; мы найдем их интегральное значение и попытаемся его истолковать.

Ради упрощения, не влияющего на результат, будем рассматривать поле на больших расстояниях и ограничиваться в разложениях членами $\sim r^{-2}$.

Коэффициенты локального лоренцева преобразования выберем в виде

$$\begin{gathered} \omega^{m}_{k\cdot} = \delta^{m}_{k}, \qquad \omega^{0}_{0\cdot} = 1, \\ \omega^{k}_{0\cdot} = -\omega^{k}_{\cdot 0} = \xi^{k}_{0\cdot}, \qquad k,\ m = 1,\ 2,\ 3, \end{gathered} \tag{24. 5}$$

при этом коэффициенты $\xi^{k}_{0\cdot}$ рассматриваются как величины второго порядка малости. Коэффициенты (24. 5) удовлетворяют условиям ортогональности (6. 5), если пренебрегать величинами третьего и выше порядка малости.

В таком приближении условия (18. 6) — сохранения калибровки — сводятся к одному уравнению

$$h^{l}_{(m)} \partial_{l} \xi^{m}_{0\cdot} = 0. \tag{24. 6}$$

Рассмотрим частный случай решения с осевой симметрией, когда $z=x^3$ будет осью симметрии. Решение уравнения (24. 6) будем искать в виде

$$\begin{aligned} &\xi^k_{0\cdot} = \Phi(\rho,\ x^3)\, E_3^{\cdot km} n_m, \qquad n_m = x^m/\rho, \quad m = 1,\ 2,\\ &\rho^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2, \qquad\qquad n_1^2 + n_2^2 = 1, \end{aligned} \tag{24. 7}$$

где E_{klm} — полностью антисимметричный единичный тензор, введенный в (21. 14). Выделяя производную по x^3 в уравнении (24. 6), находим

$$h^l_{(s)}\partial_l \xi^s_{0\cdot} + h^3_{(s)}\partial_3 \xi^s_{0\cdot} = 0, \qquad l,\ s = 1,\ 2, \tag{24. 8}$$

где, согласно (21. 17), следует положить

$$\begin{aligned} &h^l_{(s)} = A\delta^l_s + (f - A)\frac{\rho^2}{r^2} n^l n_s + \frac{x^3}{r} CE^{3l}_{\cdot s\cdot},\\ &h^3_{(s)} = (f - A)\frac{\rho x^3}{r^2} n_s - \frac{\rho}{r} CE^{3m}_{\cdot s\cdot} n_m,\\ &r^2 = \rho^2 + (x^3)^2, \qquad l,\ s,\ m = 1,\ 2. \end{aligned} \tag{24. 9}$$

Подставляя (24. 7) в (24. 8), после несложных преобразований получим

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} - \frac{\Phi}{\rho} - \frac{\rho}{x^3}\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right) E^{3sm} E^l_{3s\cdot} n_m n_l + \frac{\Phi}{\rho} E^{3sl} E_{3sl} = 0. \tag{24. 10}$$

Пользуясь равенствами

$$E^{3sm} E^l_{3s\cdot} n_m n_l = 1, \qquad E^{3sl} E_{3sl} = 2,$$

которые легко проверить, уравнение (24. 10) приводим к следующему виду:

$$x^3 \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\Phi) - \rho\frac{\partial}{\partial x^3}(\rho\Phi) = 0. \tag{24. 11}$$

После интегрирования находим

$$\Phi = \frac{1}{\rho} W(r), \tag{24. 12}$$

где $W(r)$ — любая радиальная функция.

Учитывая требования, наложенные на $\xi^l_{0\cdot}$ и, следовательно, на Φ, выберем $W(r)$ таким образом:

$$W(r) = \frac{a}{r} + \ldots; \tag{24. 13}$$

тогда коэффициенты преобразования (24. 7) будут иметь требуемый порядок малости и запишутся

$$\xi^k_{0\cdot} = \frac{a}{\rho r} E_3^{\cdot km} n_m. \tag{24. 14}$$

Подвергая теперь коэффициенты Ламэ (21. 17) преобразованию (24. 4), получим

$$\tilde{h}_k^{(s)} = h_k^{(s)}, \qquad \tilde{h}_0^{(0)} = h_0^{(0)}$$
$$\tilde{h}_k^{(0)} = \frac{a}{\rho^2} E_{3k}^{m}{}_{\cdot} n_m, \qquad \tilde{h}_0^{(k)} = -\frac{a}{\rho^2} E_{3\cdot\cdot}^{km} n_m, \tag{24. 15}$$
$$n_m = \frac{x^m}{r}, \qquad k, s, m = 1, 2, 3.$$

При разложении по степеням $1/r$ функций A, B, v, C и f, входящих в (21.17), следует ограничиться членами порядка $1/r^2$.

Для выяснения физического смысла преобразований (24.4) с коэффициентами (24.5) вычислим момент количества движения, соответствующий преобразованным тетрадам.

С точностью до $1/r^2$ имеем

$$\tilde{C}^0_{(a)(b)\cdot} = \tilde{C}^d_{\mu\nu\cdot} \tilde{h}^\mu_{(a)} \tilde{h}^\nu_{(b)} \tilde{h}^0_d \approx \tilde{C}^{(0)}_{ab\cdot} + \ldots,$$
$$\tilde{C}^0_{kn\cdot} = \partial_{[k} h^{(0)}_{n]} \sim \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{h}^{(0)} + \ldots . \tag{24. 16}$$

Воспользовавшись (20. 31), находим

$$\mathbf{S}^{(0)} = \frac{c^4}{4\pi\varkappa} \operatorname{rot} \mathbf{h}^{(0)}, \tag{24. 17}$$

или, согласно (20. 31б), имеем

$$\mathbf{S} = \frac{c^3}{4\pi\varkappa} \int \operatorname{rot} \mathbf{h}^{(0)} dV = -\frac{c^3}{4\pi\varkappa} \oint\limits_{(S\to\infty)} [\mathbf{h}^{(0)}, d\mathbf{S}]. \tag{24. 18}$$

Далее вектор $\mathbf{h}^{(0)}$ можно представить так:

$$\mathbf{h}^{(0)} = -\frac{a}{\rho^2} [\mathbf{k}_3, \mathbf{n}], \qquad \mathbf{k}_3 \sim (0, 0, 1),$$

кроме того, записывая вектор площадки в виде

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS, \qquad dS = r^2 d\omega,$$

получаем

$$\mathbf{S} = \frac{ac^3}{4\pi\varkappa} \oint\limits_{(S\to\infty)} [\mathbf{n}, [\mathbf{k}_3, \mathbf{n}]] \frac{r^2}{\rho^2} d\omega; \tag{24. 19}$$

так как

$$[\mathbf{n}, [\mathbf{k}_3, \mathbf{n}]]_z = 1 - (n_3)^2 = \sin^2\theta, \qquad \rho = r \sin\theta,$$

то после несложных вычислений находим

$$S_z = \frac{ac^3}{4\pi\varkappa} \oint d\omega = \frac{ac^3}{\varkappa}, \qquad S_x = S_y = 0. \tag{24. 20}$$

Итак, в результате преобразования группы ($\bar{B}$) тетрад в поле Шварцшильда появился момент количества движения S_z.

Этот результат можно истолковать следующим образом. До преобразования (24. 4) момент физической системы был равен нулю (поле Шварцшильда), после преобразования, т. е. после перехода во вращающуюся НСО [1], момент количества движения оказывается отличным от нуля.

Здесь мы имеем аналогию со случаем в СТО, когда после перехода от одной НСО к другой тело приобретает дополнительный импульс относительно новой системы отсчета. Очевидно, что если мы подвергнем коэффициенты Ламэ h^a_μ любым преобразованиям группы (A), то момент не появится, так как весь рассмотренный тетрадный формализм ОТО общековариантен относительно (A).

Можно легко найти распределение скоростей во вращающейся системе отсчета, возникшее вследствие преобразования (24. 4). В исходной системе отсчета, как это видно из (21. 17), где все $h^k_{(0)}$, $h^{(k)}_0$, $h^{(0)}_k$, $h^0_{(k)}$ равны нулю, векторы аффинного репера $\mathbf{e}_0$ и тетрадного $\mathbf{h}_0$ в каждой точке совпадают по направлению. Тогда для пробных частиц, покоящихся в локальных тетрадах (в локальных лоренцевых системах), их 4-векторы скорости имеют компоненты

$$u^a \sim \{1,\ 0,\ 0,\ 0\}. \tag{24. 21}$$

Относительно аффинного репера компоненты этой скорости определятся следующим образом:

$$u^\mu = h^\mu_a u^a = h^\mu_{(0)} \sim \left\{\frac{1}{f},\ 0,\ 0,\ 0\right\}. \tag{24. 21a}$$

В результате ортогонального преобразования с коэффициентами (24. 5) мы получим

$$\tilde{u}^{(k)} = \omega^{(k)}_{\cdot b} u^b = \omega^{(k)}_{\cdot (0)} = \xi^{(k)}_{\cdot 0} = -\frac{a}{\rho r} E^{km}_{3\cdot\cdot} n_m. \tag{24. 22}$$

Для вычисления v — модуля 3-вектора обычной скорости найдем квадрат пространственной части 4-вектора u^a. Согласно (24. 22), имеем

$$\sum_{k=1}^{3} (\tilde{u}^{(k)})^2 = \frac{a^2}{\rho^2 r^2} E^{km}_{3\cdot\cdot} E^{l}_{3k\cdot} n_m n_l = \frac{a^2}{\rho^2 r^2}; \tag{24. 23}$$

с другой стороны, левая часть (24. 23), как известно из СТО, равна

$$c^2 \sum_k (\tilde{u}^{(k)})^2 = \frac{v^2}{1 - v^2/c^2}.$$

---

[1] Как легко видеть, коэффициенты (24. 7) описывают локальный поворот тетрад.

Сравнивая эти выражения, окончательно находим

$$v = \frac{ac}{\rho r \sqrt{1 + (a/\rho r)^2}}, \qquad r = (\rho^2 + (x^3)^2)^{1/2}. \tag{24. 24}$$

На больших расстояниях, для которых, собственно, и верны вычисления, можно положить

$$v = \frac{ac}{\rho r} + \ldots \tag{24. 24a}$$

Выражение (24. 24) формально имеет смысл и для $r \to 0$, тогда, очевидно, v стремится к своему верхнему пределу c — скорости света. Однако по условиям задачи на малых расстояниях выражение (24. 24) не может описать точно распределение скоростей, хотя верхний предел для v, конечно, сохранится.

Осью симметрии (или осью вращения) в нашем случае является ось z и «радиус вращения» ρ, тогда угловая скорость приближенно запишется

$$v = \omega\rho, \qquad \omega = \frac{ac}{\rho^2 r} + \ldots$$

Мы видим, что система отсчета не вращается как одно целое и ее движение напоминает вихрь в некоторой среде. Это резко отличается от описания вращающейся системы отсчета как вращающейся декартовой системы координат, которое обычно рассматривается в учебных пособиях и монографиях.

Полученные результаты кажутся довольно правдоподобными; весьма возможно, что это специализированное поле тетрад (24. 15) описывает в искривленном пространстве некоторую реальную ситуацию. Тем не менее результатам этим, по причинам, о которых речь будет идти ниже, в полной мере доверять нельзя.

Рассмотрим еще один пример преобразования тетрад, на этот раз в плоском пространстве. В этом случае можно построить однородные поля аффинных реперов $\{O, \mathbf{e}_\mu\}$ и тетрад $\{O, \mathbf{h}_a\}$ и, следовательно, единую галилееву координатную сетку X^μ. При этом аффинный и ортогональный реперы будут совпадать и коэффициенты Ламэ примут вид

$$h^a_\mu = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{h}^a = \delta^a_\mu, \qquad h^\mu_a = \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{h}_a = \delta^\mu_a. \tag{24. 25}$$

Эти коэффициенты Ламэ, как постоянные, конечно, удовлетворяют условиям калибровки.

Подвергнем теперь коэффициенты (24. 25) локальным ортогональным преобразованиям

$$\tilde{h}^a_\mu = \omega^a_{\cdot b} h^b_\mu = \omega^a_{\cdot b} \delta^b_\mu = \omega^a_{\cdot \mu}, \tag{24. 25a}$$

где коэффициенты преобразования $\omega^a_{\cdot b}$, кроме условий ортогональности, должны удовлетворять еще условиям сохранения

калибровки (18. 6). Эти коэффициенты выберем в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\omega^{(k)}_{\cdot(s)} = A\delta^k_s - Bn^k n_s, \qquad \omega^{(k)}_{\cdot(3)} = gn^k, \qquad \omega^{(k)}_{\cdot(0)} = GE^{kp}_{3\cdot\cdot}n_p,\\
&\omega^{(3)}_{\cdot(k)} = -gn_k, \quad \omega^{(3)}_{\cdot(3)} = \Phi, \quad \omega^{(3)}_{\cdot(0)} = 0, \quad k,\ s,\ p = 1,\ 2,\\
&\omega^{(0)}_{\cdot(k)} = GE^{p}_{3k\cdot}n_p, \quad \omega^{(0)}_{\cdot(3)} = 0, \quad \omega^{(0)}_{\cdot(0)} = A, \qquad n_k = \frac{x^k}{r},\\
&r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2, \ E_{123} = 1, \ E_{3pk} = -E_{3kp}.
\end{aligned} \tag{24. 26}
$$

Условия ортогональности и условия (18. 6) для неизвестных функций, которые зависят только от r, дают

$$
g = a/r, \qquad \Phi = 1/A = (1-g^2)^{1/2}, \qquad G = gA, \qquad B = g^2 A; \tag{24. 26a}
$$

здесь a — постоянная интегрирования. Как видим, это преобразование обладает цилиндрической симметрией, так как коэффициенты преобразования не зависят от x^3, осью симметрии является, очевидно, ось $\mathbf{h}_{(3)}$.

Найдем поле скоростей, порождаемое преобразованием (24. 25а). Пусть локальные тетрады $\{O,\ \tilde{\mathbf{h}}_a\}$ жестко связаны с пробными частицами, тогда их локальные скорости в этих тетрадах будут

$$
u^a \sim u^{(0)} = 1, \qquad u^{(k)} = 0, \qquad k = 1,\ 2,\ 3. \tag{24. 27}
$$

Компоненты скорости относительно глобальной тетрады (или относительно исходного однородного поля тетрад) запишутся

$$
\begin{aligned}
&u^\mu = \tilde{h}^\mu_a u^a = \tilde{h}^\mu_{(0)} = \omega^\mu_{(0)\cdot},\\
&u^k = \omega^k_{(0)\cdot} = GE^{kp}_{3\cdot\cdot}n_p, \qquad u^3 = \omega^3_{(0)\cdot} = 0, \qquad u^0 = \omega^0_{(0)\cdot} = A.
\end{aligned} \tag{24. 27a}
$$

Далее обычным путем находим модуль 3-вектора скорости

$$
\sum_{k=1}^{3}(u^k)^2 = G^2 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}, \qquad (u^0)^2 = A^2 = \frac{1}{1-\beta^2};
$$

используя (24. 26а), окончательно имеем

$$
\beta = g, \qquad v = ac/r, \qquad r > a. \tag{24. 28}
$$

Распределение скоростей оказывается таким же, как в случае вихря, порожденного бесконечной прямой вихревой нитью, совпадающей с осью x^3.

Вычисляя $t^\mu_{a\cdot}$ и $S^\mu_{ab\cdot}$, мы получим значения, отличные от нуля, интегрирование которых по объему даст бесконечные величины, ввиду цилиндричности вдоль оси x^3. Мы приходим к аналогу парадокса Бауэра в тетрадах. В данном случае он легко объясним — не существует реальной бесконечной физической системы с цилиндрической симметрией. Интегрирование по конечному отрезку x^3 даст конечные значения, тогда эти результаты легко понять.

Вычислив обычное ускорение, найдем следующее выражение:

$$\frac{dv_k}{dt} = -\frac{v^2}{r} n_k, \qquad k = 1,\ 2,$$

которое показывает, что преобразованием (24. 25а) мы ввели силовое поле, которого ранее не было, поэтому появление энергии и момента вполне естественно. Однако ценность этих результатов сильно снижается тем фактом, что те же преобразования группы $(\bar{B})$ в других случаях приводят к результатам, не поддающимся физической интерпретации. Действительно, покажем, что по крайней мере некоторой части добавок, получаемых $\gamma_{\sigma,\, ab}$, $t^{\mu}_{a\cdot}$ и $S^{\mu}_{ab\cdot}$, вследствие их нетензорности относительно группы $(\bar{B})$, определенно не может быть дана физическая интерпретация.

Рассмотрим для этого локальные преобразования, вращающие только пространственную часть тетрады. Соответствующая матрица имеет следующий вид:

$$\omega^{a}_{\cdot b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^{(k)}_{\cdot (n)} \end{pmatrix}, \qquad k,\ n = 1,\ 2,\ 3. \tag{24. 29}$$

Когда $\omega^{(k)}_{\cdot (n)}$ постоянны, эта матрица описывает обычный поворот декартовой системы координат.

Из физических соображений совершенно ясно, что гравитационное поле, плотность его энергии, импульса и момента должны описываться величинами, ведущими себя как тензоры относительно преобразования (24. 29), так как оно изменяет только относительную ориентацию пространственных осей тетрад, т. е. в каждой точке устанавливаются новые начала отсчета направлений [1] (например, для измерения углов Эйлера). Но такая операция есть не что иное, как изменение нумерации в пространстве направлений и, следовательно, никак не может отразиться ни на состоянии движения системы отсчета, ни тем более на изучаемой физической системе. Однако все интересующие нас объекты $\gamma_{\sigma,\, ab}$, $\Theta^{\mu}_{a\cdot}$, $S^{\mu}_{ab\cdot}$ не являются тензорами относительно преобразований (24. 29) и, следовательно, получают в общем случае произвольные добавки, необъяснимые с физической точки зрения.

Рассмотрим, например, изменение компонент $\Theta^{\mu}_{a\cdot}$ при преобразованиях группы $(\bar{B})$.

Уравнения (19. 22) позволяют, очевидно, выразить комплекс энергии-импульса $\Theta^{\mu}_{a\cdot}$ через суперпотенциал в виде

$$\Theta^{\mu}_{a\cdot} = -\frac{c^4}{4\pi\varkappa} \nabla_{\sigma} \gamma^{\mu\sigma}_{a\cdot\cdot}. \tag{24. 30}$$

---

[1] Подробнее об этом см. в гл. IV.

Теперь следует найти преобразованное значение $\tilde{\gamma}^{\mu\sigma}_{a'\cdot\cdot}$ и подставить в (24. 30). Закон преобразования коэффициентов вращения Риччи, согласно (17. 10), запишется

$$\gamma^{a'b'}_{\lambda\cdot\cdot} = \omega^{a'}_{\cdot a}\omega^{b'}_{\cdot b}\gamma^{ab}_{\lambda\cdot\cdot} + \eta^{ab}\omega^{b'}_{\cdot b}\frac{\partial\omega^{a'}_{\cdot a}}{\partial x^\lambda};$$

умножая это на $h^\mu_{a'}h^\sigma_{b'}h^\lambda_{c'}$, где $h^\sigma_{b'} = h^\sigma_b\omega^b_{b'\cdot}$; $h^\mu_a = h^\mu_{a'}\omega^{a'}_{\cdot a}$, получим

$$\tilde{\gamma}^{\mu\sigma}_{a'\cdot\cdot} = \left\{\gamma^{\mu\sigma}_{a\cdot\cdot} + \eta^{cb}h^\mu_d h^\sigma_b h^\lambda_a \omega^d_{c'\cdot}\cdot\frac{\partial\omega^{c'}_{\cdot c}}{\partial x^\lambda}\right\}\omega^a_{a'\cdot\cdot}$$

Для расходимости имеем следующее выражение:

$$\nabla_\sigma\tilde{\gamma}^{\mu\sigma}_{a'\cdot\cdot} = \left\{\nabla_\sigma\gamma^{\mu\sigma}_{a\cdot\cdot} + \eta^{cb}\nabla_\sigma\left(h^\mu_d h^\sigma_b h^\lambda_a\omega^d_{c'\cdot}\frac{\partial\omega^{c'}_{\cdot c}}{\partial x^\lambda}\right)\right\}\omega^a_{a'\cdot} +$$

$$+\left\{\gamma^{\mu\sigma}_{a\cdot\cdot} + \eta^{cb}h^\mu_d h^\sigma_b h^\lambda_a\omega^d_{c'\cdot}\frac{\partial\omega^{c'}_{\cdot c}}{\partial x^\lambda}\right\}\frac{\partial\omega^a_{a'\cdot}}{\partial x^\sigma}.$$

Подставляя это в (24. 30), находим

$$\tilde{\Theta}^{\mu}_{a'\cdot} = \omega^a_{a'\cdot}\Theta^\mu_{a\cdot} + \omega^a_{a'\cdot}B^\mu_{a\cdot} + \frac{\partial\omega^a_{a'\cdot}}{\partial x^\sigma}B^{\mu\sigma}_{a\cdot\cdot},$$

где

$$B^\mu_{a\cdot} = -\frac{c^4}{4\pi\varkappa}\eta^{cb}\nabla_\sigma\left\{h^\mu_d h^\sigma_b h^\lambda_a\omega^d_{c'\cdot}\frac{\partial\omega^{c'}_{\cdot c}}{\partial x^\lambda}\right\},$$

$$B^{\mu\sigma}_{a\cdot\cdot} = -\frac{c^4}{4\pi\varkappa}\left\{\gamma^{\mu\sigma}_{a\cdot\cdot} + \eta^{cb}h^\mu_d h^\sigma_b h^\lambda_a\omega^d_{c'\cdot}\frac{\partial\omega^{c'}_{\cdot c}}{\partial x^\lambda}\right\}.$$

Мы видим, что комплекс энергии-импульса относительно группы (B) преобразуется довольно сложным образом. Отсюда ясно также, что если $\omega^a_{a'\cdot} = \mathrm{const}$, то комплекс преобразуется как вектор, ибо контравариантный мировой индекс является инвариантным относительно группы (B).

В частном случае, когда $\omega^a_{\cdot b}$ имеют вид (24. 29), т. е. когда мы изменяем только начала отсчета направлений, наиболее интересная для нас компонента комплекса $\Theta^\mu_{(0)\cdot}$ преобразуется по закону

$$\tilde{\Theta}^\mu_{(0)\cdot} = \Theta^\mu_{(0)\cdot} + B^\mu_{(0)\cdot}. \qquad (24.\ 30\text{a})$$

Таким образом, нековариантность комплекса $\Theta^\mu_{a\cdot}$ и других величин относительно преобразований (24. 29) не может рассматриваться как некоторое физическое следствие, это есть такая же трудность, как и нековариантность результатов метрической формулировки ОТО относительно группы преобразований (A).

Можно, однако, комплекс (24. 30) несколько улучшить, именно, представить его в такой форме, что его компоненты $\Theta^\mu_{(0)\cdot}$ по отношению преобразований (24. 29) будут вести себя как инварианты [37].

Чтобы уяснить смысл этих преобразований, рассмотрим сначала аналогичные преобразования в электродинамике.

Пусть F_{ab} — тензор электромагнитного поля, объединяющий векторы **E** и **B**; D_{ab} — тензор индукции, объединяющий векторы **D** и **H**, тогда

$$D_{ab}=F_{ab}+4\pi P_{ab}, \tag{24. 31}$$

где P_{ab} — тензор поляризации, объединяющий вектор **P** — электрической поляризации и **I** — вектор намагниченности среды. Пусть далее j_a — 4-вектор плотности тока проводимости и заряда (мы используем галилеевы координаты), тогда уравнения Максвелла запишутся

$$\frac{\partial D^{b}_{a\cdot}}{\partial x^b}=\frac{4\pi}{c}j_a. \tag{24. 32}$$

Подставляя в (24. 32) значение $D^{b}_{a\cdot}$, находим

$$\frac{\partial F^{b}_{a\cdot}}{\partial x^b}=\frac{4\pi}{c}\left\{j_a+c\frac{\partial P^{b}_{a\cdot}}{\partial x^b}\right\}. \tag{24. 33}$$

Здесь в правой части появилось новое слагаемое — плотность тока поляризации, составляющая вместе с j_a плотность полного тока. Используя терминологию ОТО, можно сказать, что (24. 32) дает выражение плотности тока j_a через суперпотенциал D_{ab}, автоматически приводящее к закону сохранения $\partial_a j^a=0$. Точно так же выражение (24. 33) определяет сохраняющийся полный ток через суперпотенциал F_{ab}, при этом ток поляризации сохраняется независимо от j_a.

Нечто подобное мы проделаем с выражением (19. 22). Запишем для этого выражение коэффициентов Риччи в ортогональных компонентах

$$\gamma_{a,\,bc}=C_{ba,\,c}+C_{bc,\,a}+C_{ac,\,b}, \tag{24. 34}$$

которое получится после свертки выражения (8. 7) с коэффициентами Ламэ. Составим затем из компонент $C_{ab,\,c}$ полностью антисимметричное выражение

$$P_{abc}=C_{ab,\,c}+C_{bc,\,a}+C_{ca,\,b}; \tag{24. 35}$$

сравнивая (24. 34) и (24. 35), находим

$$\gamma^{bc}_{a,\,\cdot\cdot}=2C^{bc}_{\cdot\cdot,\,a}-P^{bc}_{a\cdot\cdot} \tag{24. 36}$$

или после умножения на h^{μ}_{b} и h^{σ}_{c} получим

$$\gamma^{\mu\sigma}_{a,\,\cdot\cdot}=2C^{\mu\sigma}_{\cdot\cdot,\,a}-P^{\mu\sigma}_{a\cdot\cdot}. \tag{24. 37}$$

Это выражение эквивалентно (24. 31). Подставляя (24. 37) в уравнения гравитационного поля

$$\nabla_{\sigma}\gamma^{\mu\sigma}_{a,\,\cdot\cdot}=-\frac{4\pi\varkappa}{c^4}\Theta^{\mu}_{a\cdot},$$

являющиеся аналогом (24. 32), и преобразуя, получим, очевидно, аналог (24. 33)

$$\nabla_\sigma C^{\mu\sigma}_{\cdot\cdot,\,a} = -\frac{2\pi\varkappa}{c^4}\tilde{\Theta}^{\mu}_{a\cdot}, \tag{24.38}$$

где выражение

$$\tilde{\Theta}^{\mu}_{a\cdot} = \Theta^{\mu}_{a\cdot} - \frac{c^4}{4\pi\varkappa}\nabla_\sigma P^{\mu\sigma}_{a\cdot\cdot} \tag{24.39}$$

можно назвать комплексом плотности полной энергии-импульса, включающим вклад, обусловленный поляризационными свойствами поля. Легко видеть, что закон сохранения для комплекса (24. 39) по-прежнему имеет место, при этом поляризационная часть сохраняется независимо.

Итак, новый комплекс энергии-импульса выражается через суперпотенциал следующим образом (ср. с (24. 30)):

$$\tilde{\Theta}^{\mu}_{a\cdot} = -\frac{c^4}{4\pi\varkappa}\nabla_\sigma C^{\mu\sigma}_{\cdot\cdot,\,a}. \tag{24.40}$$

Здесь величины

$$C^{\mu\sigma}_{\cdot\cdot,\,a} = g^{\mu\nu}g^{\sigma\lambda}C_{\nu\lambda,\,a}, \qquad C^{a}_{\nu\lambda\cdot} = \partial_{[\nu}h^{a}_{\lambda]}$$

представляют собой компоненты объекта неголономности, при этом компоненты

$$C^{(0)}_{\nu\lambda\cdot} = \partial_{[\nu}h^{(0)}_{\lambda]} \tag{24.41}$$

остаются инвариантными при преобразованиях (24. 29), так как этому преобразованию подвергаются только $h^{(k)}_{\lambda}$, $k=1, 2, 3$, а вектор $h^{(0)}_{\lambda}$ остается неизменным. Отсюда следует, что компоненты

$$\tilde{\Theta}^{\mu}_{(0)\cdot} = -\frac{c^4}{2\pi\varkappa}\nabla_\sigma C^{\mu\sigma}_{\cdot\cdot,\,(0)} \tag{24.42}$$

комплекса энергии-импульса обладают следующими свойствами:

1) удовлетворяют закону сохранения

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\{\Lambda\tilde{\Theta}^{\mu}_{(0)\cdot}\} = 0;$$

2) преобразуются как компоненты контравариантного 4-вектора относительно группы (A).

3) остаются инвариантными относительно преобразований (24. 29), составляющих подгруппу чисто пространственных вращений тетрад, группы $(\bar{B})$.

Таким образом, комплекс энергии (24. 42) позволяет однозначно подсчитать энергию, заключенную в любом объеме, в любой координатной сетке и при любом расположении локальных декартовых триад.

Однако совершенно очевидно, что проблема построения общековариантных характеристик гравитационного поля этим еще не

решается, ибо остальные компоненты комплекса энергии и весь комплекс плотности момента количества движения (20. 42) по-прежнему остаются нековариантными относительно преобразований (24. 29), не говоря уже о других отмеченных ранее трудностях.

Как мы отмечали выше, тетрадная формулировка ОТО не эквивалентна метрической, хотя метрический тензор в обеих формулировках один и тот же. Это связано с наличием группы преобразований ($\bar{B}$), относительно которой основные характеристики гравитационного поля не являются тензорами. В частности, эта неэквивалентность проявилась при преобразованиях (24. 4) коэффициентов Ламэ, относящихся к центрально-симметричному гравитационному полю.

В самом деле, метрический тензор, найденный с помощью тетрад (21. 17) и преобразованных тетрад (24. 15), будет одним и тем же, так как $g_{\mu\nu}$ — инвариант относительно группы ($\bar{B}$), однако во втором случае, как мы показали, момент количества движения отличен от нуля. Таким образом, создается впечатление, что в тетрадной формулировке ОТО метрический тензор описывает состояние наблюдаемой системы не полностью, более полное описание дают коэффициенты Ламэ. Здесь возникает ряд вопросов.

1. Какова физическая причина возникновения момента (24. 20) или, иначе, какой физический смысл имеют преобразования (24. 4)? Эти преобразования, возможно, описывают переход к новой системе отсчета — вращающейся НСО, хотя мы до сих пор еще не знаем точно, что это такое, либо это может быть описание нового состояния наблюдаемой физической системы.

2. Коэффициенты Ламэ являются скалярными произведениями векторов аффинного репера $\mathbf{e}_\mu$ и векторов ортонормированного репера $\mathbf{h}_a$

$$h^a_\mu = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{h}^a.$$

Спрашивается, векторы какого репера — аффинного или ортонормированного — следует рассматривать как потенциалы гравитационного поля?

Где же причина всех этих трудностей и неясностей?

Совершенно очевидно, что по крайней мере часть трудностей обусловлена нетензорностью относительно группы ($\bar{B}$) величин $\gamma_{\sigma, ab}$ и $C^a_{\mu\nu\cdot}$, принятых за характеристики гравитационного поля. Эти величины, помимо информации о гравитационном поле, содержат еще «лишнюю» информацию, не имеющую к нему непосредственного отношения.

Рассмотрим, например, бесконечно малые коэффициенты поворота

$$\varphi_{(kn)} = -\varphi_{(nk)} = \gamma_{\sigma, (k)(n)} dx^\sigma, \qquad k, n = 1, 2, 3,$$

описывающие изменение относительной ориентации пространственной части тетрад, смещенных относительно друг друга на dx^σ. Сама по себе относительная ориентация их, как мы видели,

не может характеризовать какое-либо силовое поле, однако величины $\gamma_{\sigma, (k)(n)}$ входят в выражение тензора кривизны и, следовательно, вносят в него эту несущественную информацию.

Кроме того, мы до сих пор не представляем себе с достаточной ясностью, какая еще физическая информация, кроме сведений о гравитационном поле, входит в коэффициенты Риччи и тензор кривизны. Что этот вопрос не праздный, видно из того, что в уравнения Эйнштейна в качестве источника гравитационного поля входит тензор энергии-импульса, который содержит гораздо больше информации чем, например, 4-вектор тока в электродинамике. Но заранее не ясно, вся ли эта информация в равной мере нужна для описания свойств гравитационного поля [40].

Для того чтобы можно было детально разобраться в характере информации, содержащейся в тензоре кривизны и других геометрических объектах, необходимо сначала решить более простую задачу — научиться описывать НСО и уяснить себе, как влияют силовые поля, обеспечивающие неинерциальное движение базиса системы отсчета, на ее геометрические свойства.

Эта задача не только не решена в настоящее время, но даже еще не поставлена должным образом.

Глава IV

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

25. Что такое система отсчета

Системы отсчета являются необходимым составным элементом любого как экспериментального, так и теоретического исследования явлений природы. Не существует такого явления и нет такого наблюдателя, которых нельзя было бы отнести к какой-либо системе отсчета. Иногда последняя задается помимо воли и желания наблюдателя — экспериментатор и его приборы пока вынуждены, в основном, находиться на Земле. Принадлежность к такой «естественной» системе отсчета накладывает определенный отпечаток на результаты наблюдений, с которыми следует считаться. Только при правильном учете (описании) систем отсчета в соответствии с условиями наблюдения можно ожидать результатов, поддающихся физической интерпретации.

Однако, как это ни парадоксально, в настоящее время нет общепризнанного аналитического определения как самих систем отсчета, так и правил перехода от одних к другим. Если в случае инерциальных систем отсчета, в которых введены галилеевы системы координат, мы убеждены, что координатные преобразования Лоренца связывают пространственные координаты и время двух различных ИСО, то в случае неинерциальных систем отсчета ситуация далеко не такая ясная.

Систему отсчета часто отождествляют, как мы говорили, с системой координат, специализированной определенным образом: с галилеевой — в специальной теории относительности, с синхронной — в общей теории относительности.

Начиная с Эйнштейна, долгое время считалось, что переход от одной НСО к другой должен описываться произвольными преобразованиями координат (группа A), ибо, как полагал Эйнштейн, среди всевозможных преобразований координат всегда найдутся те, которые описывают относительное движение трехмерных координатных систем [1].

Мы видим, что здесь еще нет различия между понятиями системы отсчета и системы координат.

Значительно позже, реализуя в некотором смысле предположение Эйнштейна, группу (A) разделили на две подгруппы:

$$(A_1) \sim \begin{cases} x^{k'} = f^{k'}(x^k) \\ x^{0'} = f^{0'}(x^k,\ x^0) \end{cases}, \qquad (A_2) \sim \begin{cases} x^{k'} = \varphi^{k'}(x^k,\ x^0) \\ x^{0'} = x^0 \end{cases}, \qquad (25.1)$$

$$k,\ k' = 1,\ 2,\ 3.$$

При этом предполагается, что (A_1) описывает изменение координатной сетки в одной и той же системе отсчета, в то время как (A_2) описывает переход от одной системы отсчета к другой, так как в последнем случае пространственные координаты $x^{k'}$ становятся зависящими от времени x^0.

На основе такого разделения был развит формализм хронометрических инвариантов [22].

Здесь сразу же возникают две трудности. Во-первых, в случае произвольных координат в ОТО координата x^0 не является тем временем, отрезки которого dx^0 можно измерять каким-либо прибором. Произвольные координаты в ОТО не имеют сами по себе ни метрического, ни физического смысла. Поэтому, вообще говоря, координаты $x^{k'}$ в подгруппе (A_1) могут оказаться зависящими от физического времени и, наоборот, эти же координаты в подгруппе (A_2) могут не зависеть от него.

Во-вторых, если учесть, что как в СТО, так и в ОТО могут вводиться нестационарные (т. е. зависящие от времени) координатные сетки, отображающие (см. раздел 26) изменяющийся со временем порядок перечисления мировых точек, то, оставаясь в рамках преобразований (A_1), (A_2), оказывается совершенно невозможным отличить переход к новой системе отсчета от перехода к новой нестационарной сетке в одной и той же системе отсчета.

В самом деле, если мы будем переносить начало отсчета, например, декартовых координат в отрицательном направлении оси X^1 со «скоростью» $v\,(t)$, то это ни в коей мере еще не означает, что материальная точка, покоившаяся до этого где-то на оси X^1, начнет двигаться в положительном направлении оси со скоростью $v\,(t)$! Однако преобразование координат, отвечающее этому фиктивному движению,

$$\begin{aligned} &\widetilde{X}^1 = X^1 + \varphi^1(X^0), && \widetilde{X}^k = X^k, \\ &X^0 = X^0 = ct, && k = 2,\ 3 \end{aligned} \tag{25.2}$$

является частным случаем подгруппы (A_2) и, по предположению, должно было бы описывать реальное относительное движение.

Как известно, в СТО относительное движение двух тел описывается двумя мировыми линиями, которые являются абсолютным построением, не зависящим от выбора системы координат. Именно поэтому преобразования подгруппы (A_2) не могут описывать изменение состояния движения тела (системы) отсчета.

Систему отсчета иногда представляют в виде множества движущихся наблюдателей [32], [33], где движение каждого характеризуется 4-вектором скорости u^μ. Такая система отсчета называется «физической». Этим авторы, по-видимому, хотят противопоставить ее «нефизической» системе, под которой, вероятно, следует понимать координатную сетку. Остается неясным, как предполагается описывать переход от одной системы отсчета к другой, так как поле скоростей u^μ — это инвариантное поле, не за-

висящее ни от выбора координатной сетки, ни от выбора поля координатных тетрад.

Не менее часто систему отсчета описывают полем координатных тетрад $\{O, \mathbf{e}_a\}$, $\{O, \mathbf{h}_a\}$, тогда переход от одной системы отсчета к другой описывается вращениями тетрад, т. е. преобразованиями группы (B).

Наконец, по аналогии с формализмом хронометрических инвариантов, группу преобразований (B) разбивают на две подгруппы (B_1) и (B_2) [38]:

1. (B_1) — подгруппа локальных вращений, задаваемая матрицей (24. 29). Она описывает локальное изменение ориентации декартовых триад в одной и той же системе отсчета.

2. (B_2) — подгруппа локальных гиперболических вращений, т. е. собственно лоренцевых преобразований. Она, как предполагается, описывает переход от одной системы отсчета к другой.

Относительно подгруппы (B_2) можно сделать замечание, аналогичное тому, которое мы сделали ранее относительно подгруппы (A_2). Здесь возникает подобный вопрос: как можно различить два случая, когда подгруппа (B_2) описывает переход к новой системе отсчета и когда она описывает выбор новых локальных начал отсчета и относительных скоростей в одной и той же системе отсчета?

Действительно, оставаясь связанным с одним и тем же телом отсчета, т. е. оставаясь в одной и той же системе отсчета, мы можем условно приписать ему любое значение скорости v в пределах $0 \leqslant v < c$ и это никак не отразится на определении относительных скоростей (например пробных частиц). Более того, каждому базисному телу системы можно приписать свое собственное начало отсчета скоростей. В результате получится поле начальных скоростей, которое при расчетах всегда можно учесть подходящими коэффициентами связности, компенсирующими этот произвол.

Далее, локальные начала отсчета скоростей могут зависеть также и от времени, т. е. можно вводить нестационарное поле начал отсчета скоростей (подобно нестационарной координатной сетке).

Наконец, в одной и той же системе отсчета можно переходить от одного поля начальных скоростей к другому, этот переход будет описываться очевидно локальными преобразованиями Лоренца, т. е. группой (B), и все это, как видим, не имеет никакого отношения к переходу от одной системы отсчета к другой.

Ниже мы разберем все эти вопросы более подробно и покажем, что, оставаясь в рамках преобразований подгруппы (B_2), различить эти два случая не представляется возможным, а следовательно, невозможно оправдать данную здесь физическую интерпретацию подгруппы (B_2).

Ниже перечислены основные бытующие ныне способы отображения систем отсчета и указаны операции, описывающие переход между ними.

Геометрическое отображение системы отсчета	Операция, описывающая переход
	ИСО
Галилеева система координат X_a, $a = 0, 1, 2, 3$	Координатные преобразования Лоренца. Линейный случай группы (A) $X^{a'} = \omega^{a'}_{\cdot a} X^a, \quad \omega^{a'}_{\cdot a} = \mathrm{const}$
Однородное поле координатных тетрад $\{O, \mathbf{e}_a\}$, $a = 0, 1, 2, 3$	Лоренцевы (гиперболические) нелокальные вращения тетрад. Частный случай подгруппы (B_2) $\mathbf{e}_{a'} = \omega^a_{a'} \mathbf{e}_a, \quad \omega^a_{a'} = \mathrm{const}$
	НСО
Произвольная система координат x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$	Произвольные преобразования координат. Группа преобразований (A) $x^{\mu'} = f^{\mu'}(x^\mu), \quad x^\mu = \varphi^\mu(x^{\mu'})$
То же	Подгруппа преобразований (A_2) группы (A) $x^{k'} = \varphi^{k'}(x^k, x^0), \quad x^{0'} = x^0, \quad k, k' = 1, 2, 3$
Поле векторов u^μ (поле локальных наблюдателей) $u^\mu = dx^\mu/ds$	?
Неоднородное поле координатных тетрад $\{O, \mathbf{h}_a\}$, $a = 0, 1, 2, 3$	Локальные вращения тетрад. Группа преобразований (B) $\mathbf{h}_{a'} = \omega^a_{a'} \mathbf{h}_a$
То же	Подгруппа преобразований (B_2) локальных, гиперболических вращений, т. е. локальных преобразований Лоренца

Сам факт существования принципиально различных аналитических определений систем отсчета и переходов между ними говорит о неудовлетворительной ситуации.

Что же в действительности представляет собой система отсчета, что будет являться ее геометрическим отображением, как связаны между собой различные системы отсчета — инерциальные и неинерциальные? На эти вопросы сейчас нет однозначного ответа.

Система отсчета, с одной стороны, представляет собой как бы мизансцену, на фоне которой развертываются события, с другой стороны, это своеобразный физический прибор, предназначенный для выполнения некоторых измерений, и как таковой имеет нечто общее с любым обычным физическим прибором.

Так, например, амперметр имеет прежде всего физическую основу — базис, состоящий из магнита, рамки с обмоткой, стрелки и т. д. Но этот базис превратится в физический прибор, пригодный для измерений, только после того, как будет осуществлена его градуировка, которая должна быть в принципе любым, но однозначным образом зафиксирована на его шкале.

Точно так же и система отсчета должна иметь физический базис — набор определенным образом движущихся тел, стандартных приспособлений, масштабов и часов. Это могут быть, вообще говоря, Солнце, звезды, сигналы радиомаяка, гироскопы и другие датчики, позволяющие ориентироваться в пространстве и времени. Утрируя, можно сказать, что базис системы отсчета в пределе представляет собой бесконечное количество движущихся стандартных тел — физических реперов, с каждым из которых связан периодический процесс — часы.

Такой базис превратится в систему отсчета только после того, как будет проградуирован так, чтобы, пользуясь этой градуировкой, можно было указать мгновенное положение центра масс тела, ориентацию и скорость относительного движения.

Градуировка системы отсчета слагается из двух существенно различных этапов, которые мы условно назовем A-градуировка и B-градуировка. Такое разделение не случайно, ибо, как увидим, каждой градуировке соответствует своя группа преобразований, описывающая ее изменение.

26. A-градуировка системы отсчета

Рассмотрим теперь A-градуировку системы отсчета. Прежде всего это точечная градуировка, которая позволяет каждому телу, в пределе каждой материальной точке, поставить в соответствие четыре числа, характеризующие положение материальной точки в физическом (трехмерном) пространстве и отмечающие соответствующий момент времени.

Совершенно очевидно, что градуировка, отвечающая этим требованиям, должна состоять в перечислении (нумерации) в определенном порядке всех пространственно-временных точек данной области физического пространства-времени.

Здесь будет полезно вспомнить начало второго раздела, где мы подробно рассмотрели нумерацию элементов абстрактного множества и ее геометрическое отображение.

Все сказанное там можно дословно повторить применительно к A-градуировке системы отсчета, если абстрактное множество элементов M мы интерпретируем как множество положений (точек) и соответствующих моментов времени.

Это сопоставление приведено ниже (см. стр. 120).

Два многообразия, координатные сетки которых связаны преобразованиями группы (A), как мы уже говорили, называются диффеоморфными. Тогда, применительно к нашему случаю, диффеоморфизм многообразий отображает тот факт, что в одной и той же области пространства-времени нумерацию точек можно осуществлять бесконечным количеством эквивалентных [1] способ-

[1] Однозначно связанных между собой.

Отображаемый объект	Геометрическое отображение
Номер пространственно-временнóй точки в физическом пространстве-времени	Координаты x^μ, $\mu=0, 1, 2, 3$ точки M в многообразии
Нумерация всех точек в данной области физического пространства-времени	Координатная система (сетка), заданная в числовой области Ω изменения переменных x^μ
Новая нумерация пространственно-временных точек, однозначно связанная с предыдущей	Новая координатная сетка $x^{\mu'}$, однозначно связанная с сеткой x^μ преобразованиями группы (A)

бов, которым в многообразии соответствует бесконечное количество координатных сеток, связанных между собой преобразованиями группы (A).

Таким образом, по своему смыслу нумерация точек пространства-времени или изменение ее не может влиять на состояние исследуемой физической системы. Точно так же и выбор координатной сетки как отображения нумерации или преобразования координат группы (A) как отображения изменения нумерации никак не связан с изменением физической ситуации.

Из предыдущего также следует, что дифференциалы координат dx^σ не могут быть истолкованы ни как отрезки длины, ни как промежутки времени; для этого необходима метрика, определить которую можно только, исходя из дополнительных геометрических и физических соображений. Так, например, галилеевы координаты X^a в СТО имеют простой метрический и физический смысл — пространственных расстояний и промежутков времени. Следовательно, A-градуировка может быть осуществлена здесь путем измерения этих величин. Но, независимо от того, какова метрика пространства и введена ли она вообще, основное назначение координат всегда одно и то же — отображение нумерации точек физического пространства-времени.

Мы рассмотрели свойства и отображение A-градуировки системы отсчета, однако одной ее еще недостаточно для описания движения тела. Поэтому рассмотрим второй этап градуировки, существенно дополняющий A-градуировку.

27. B-градуировка системы отсчета

Для описания движения тела, кроме сведений о мгновенном положении, необходимо также знать его мгновенную ориентацию и скорость движения центра масс. В общем случае этих данных все еще недостаточно, но мы ограничимся пока ими.

Тела, образующие базис системы отсчета, представляют собой, как было сказано, физические реперы. Они имеют физически выде-

ленные направления, реализованные с помощью гироскопов, лучей света и других устройств. Относительно этих выделенных направлений можно делать отсчеты, определять ориентацию. Однако чтобы это можно было выполнить фактически, направления, так же, как и положения, необходимо занумеровать (т. е. перечислить), а для этого следует задать начальные направления, например, для отсчета трех углов Эйлера. А так как понятие направления относительно, то устанавливать начальные или нулевые направления можно произвольно, более того, локально и нестационарно, т. е. в каждой точке пространства-времени свои.

Для определения скорости движения наблюдаемого объекта необходимо выбрать тело отсчета скоростей, приписав ему условно скорость, равную нулю. Но ввиду относительного характера скорости, как мы уже отмечали, выбор начала отсчета можно делать также совершенно произвольно, и даже для каждого базисного тела системы, в пределе в каждой пространственно-временной точке, можно выбирать свой нуль для отсчета относительных скоростей.

Мы видим, что для определения относительных скоростей (так же, как положений и направлений) необходимо прежде всего занумеровать (перечислить) всевозможные скорости и эта нумерация может быть выполнена с большим произволом.

В этом и заключается содержание B-градуировки системы отсчета.

Для того чтобы B-градуировку можно было описать аналитически, с ней необходимо проделать примерно ту же операцию отображения, которую мы проделали с A-градуировкой, получив координатную сетку.

Прежде всего установим, что следует понимать здесь под множеством элементов M. Напомним, что в случае A-градуировки это было множество мгновенных положений в физическом пространстве-времени. Сопоставив смысл A- и B-градуировок, мы придем к заключению, что в случае B-грудуировки множество элементов M может быть интерпретировано как множество мгновенных относительных ориентаций и скоростей тел в физическом пространстве-времени.

Теперь следует найти подходящую область $\tilde{\Omega}$ для отображения этого множества.

Совершенно очевидно, что рассмотренная ранее область точечного многообразия непосредственно использована быть не может уже потому, что каждый элемент M характеризуется теперь не четырьмя, а шестью числами: тремя углами Эйлера и тремя проекциями относительной скорости, т. е. имеют шесть измерений. Кроме того, B-градуировка связана с определением направлений, по крайней мере локально, которых нет в точечных многообразиях. Наконец, для B-градуировки необходимо понятие скорости.

Все это с очевидностью указывает на то, что B-градуировку можно будет отобразить на локальные касательные к точечному

многообразию пространства. При этом касательные пространства должны быть метризованные, иначе ни углов, ни тем более скоростей определить будет невозможно.

Эксперимент, в лице СТО, подсказывает нам, что локальное касательное пространство по своим свойствам должно быть локальным галилеевым пространством, т. е. плоским пространством с псевдоэвклидовой метрикой.

Итак, в локальном касательном пространстве B-градуировку в данной точке — в точке соприкосновения касательного пространства и точечного многообразия — мы можем отобразить следующим образом: во-первых, локальные начальные направления для отсчета углов можно отобразить, задав декартову триаду, во-вторых, локальное начало отсчета скоростей, согласно СТО, можно отобразить, задавая четвертую (временноподобную) ось, ортогональную триаде. Иначе говоря, B-градуировка в данной точке отобразится заданием локальной тетрады!

Следовательно, множество шестимерных элементов $\widetilde{M}$ находит свое естественное отображение на множестве тетрад[1]

$$\{0, \mathbf{h}_a\}, \qquad a = 0, 1, 2, 3, \tag{27.1}$$

где вектор $\mathbf{h}_0$ — временноподобен, остальные три $\mathbf{h}_k$, составляющие декартову триаду, — пространственноподобны. Отсюда видно, что искомая область $\tilde{\Omega}$ должна представлять собой совокупность (геометр скажет — пространство) ортогональных реперов—тетрад, образом точки в которой является сама тетрада.

Не следует думать, что координатные тетрады (27. 1) отображают собой физические реперы. Они отображают лишь нулевые направления для отсчета углов и относительных скоростей и могут, очевидно, изменяться в одном и том же физическом репере с большим произволом.

Мировая точка O — начало тетрады (27. 1) — отображает мгновенное положение. Множество этих точек и есть то точечное многообразие, на которое отображена A-градуировка. Тетрады только одной точкой O — своим началом — принадлежат этому многообразию. Геометрически это означает, что преобразования группы (A) изменяют координаты точек O, но не меняют, вообще говоря, ориентации самих тетрад [2]. Группа (A) действует только в точечном многообразии.

Отображение множества четырехмерных ориентаций на пространство тетрад, по аналогии со случаем A-градуировки, запишем так:

$$\widetilde{M} \leftrightarrow \{O, \mathbf{h}_a\} \in \tilde{\Omega}. \tag{27.2}$$

---

[1] Эти тетрады, как мы говорили, называются координатными на том основании, что с каждой из них связана локальная неголономная галилеева система координат (см. разделы 6 и 7).

[2] При специальном соглашении, как в случае аффинных координатных реперов, последние изменяются вместе с преобразованием координатной сетки.

Легко видеть, что два отображения (27. 2) могут отличаться только относительной ориентацией тетрад, иначе говоря, они связаны локальным ортогональным преобразованием, т. е. преобразованиями группы (B). Эта группа действует только в пространстве тетрад и выполняет примерно ту же роль, что и группа (A) в точечном многообразии.

Таким образом, поле координатных тетрад (27. 1) представляет собой в общем случае нестационарную B-шкалу того своеобразного физического прибора, который мы называем системой отсчета; при этом группа преобразований (B) описывает изменение градуировки этой шкалы.

После этого становится совершенно ясным, что разбиению группы (B) на две подгруппы — (B_1) и (B_2), вообще говоря, не может быть дана та физическая интерпретация, о которой мы говорили. Подгруппа (B_2) описывает только изменение локальных начал отсчета относительных скоростей и непосредственно, если не сделано специальных допущений, не связана с описанием перехода от одной системы отсчета к другой.

Здесь мы снова подчеркнем, что, согласно СТО, относительное движение тел описывается мировыми линиями, т. е. инвариантным построением, которое не зависит ни от выбора координатной сетки, ни от выбора координатных (градуировочных) тетрад.

28. Следствия градуировки системы отсчета

Проделанное геометрическое отображение A- и B-градуировки системы отсчета целиком основывается на опытных фактах, прямо или косвенно характеризующих фундаментальные свойства физического пространства, времени и движения. Поэтому геометрическое отображение градуировки в то же время есть некоторое отображение этих фундаментальных свойств. Приведем два примера.

Четырехмерность многообразия, на которое мы отобразили A-градуировку, не вытекает из аксиом геометрии. Это следствие того опытного факта, что для характеристики точечного события требуется четыре числа. Следующие утверждения также нельзя вывести из аксиом геометрии: метрика касательного пространства должна быть псевдоэвклидова и в этом пространстве должна действовать группа преобразований (B). Это есть следствие относительности направлений и инерциальных движений, т. е. следствие специального принципа относительности.

Без подобных ограничивающих выбор опытных фактов геометрия предоставляет в распоряжение физиков практически необозримые возможности в виде множеств, топологических пространств разного вида, многообразий и т. д., среди которых дифференцируемые многообразия и метрические пространства, оказавшиеся нам необходимыми, представляют хотя и «высокоргани-

зованный», но весьма частный случай топологических пространств [36].

Для наглядности сопоставим некоторые основные опытные факты и геометрические понятия, которые требуются для их отображения.

Опытный факт	Геометрическое отображение
Физическое пространство трехмерно, время — одномерно	Связная область топологического пространства, в котором число измерений $n=4$, есть топологический инвариант
Точки физического пространства и моменты времени можно перечислять. Одно перечисление можно заменять другим	Дифференцируемое многообразие класса C^N, в котором введена система координат x^μ и определена группа преобразований (A)
В пространстве, по крайней мере локально, можно определять относительные направления и скорости движения, изменять начала отсчета направлений и скоростей	Расслоенные пространства с псевдоэвклидовой метрикой и группой преобразований (B) в слое

Характерной особенностью перечисленных выше опытных фактов и геометрических отображений является их чрезвычайная общность, они имеют силу при рассмотрении любой физической систем.ы

Выполнив градуировку системы отсчета, мы можем уже в локальных касательных пространствах записать квадрат длины интервала и задать вектор с помощью локальных ортогональных компонент

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{A}^a \mathbf{h}_a, \tag{28. 1}$$

где dx^a — дифференциалы неголономных галилеевых координат, построенных на основе координатной тетрады (27. 1). Однако между отдельными касательными пространствами пока нет никакой связи. Мы еще не можем сравнивать векторы, находящиеся в разных точках, т. е. отнесенные к разным локальным тетрадам. Из отдельных элементов ds мы не можем построить мировую линию. Для этого в многообразии следует ввести метрику, иначе превратить точечное многообразие в риманово пространство, а для этого снова необходимы опытные факты, теперь уже характеризующие конкретную физическую систему.

Исходя из того, что выбор как A- так и B-градуировки — операция, хотя и необходимая, но в основном формальная, не влияющая ни на состояние движения системы отсчета, ни тем более на состояние изучаемого объекта, можно сделать следующие выводы:

1. Законы природы аналитически должны выражаться в форме, общековариантной относительно обеих групп преобразований (A) и (B).

2. Все физические величины должны геометрически отображаться общековариантными относительно групп (A) и (B) тензорами.

Это является минимальным необходимым требованием, без которого невозможна физическая интерпретация аппарата любой теории.

Механика и электродинамика полностью отвечают этим требованиям; что касается ОТО, то, как мы видели, в метрической формулировке она нековариантна относительно группы (A), в тетрадной — нековариантна относительно группы (B). По этой причине мы до сих пор не имеем физической интерпретации аппарата ОТО.

Из предыдущего рассмотрения вытекает еще один важный вывод — преобразования групп (A) и (B) не могут описывать переход от одной системы отсчета к другой даже в том случае, если системы отсчета инерциальные. Всякий раз, как только мы обратимся к этим преобразованиям, пытаясь описать переход от одной системы отсчета к другой, будет возникать неизбежный вопрос — а как отличить, когда эти преобразования описывают изменение градуировки и когда — переход к другой системе отсчета? Легко видеть, что, оставаясь в рамках этих преобразований, ответить на данный вопрос невозможно [1]. Даже в том случае, когда преобразования группы (A) и (B) любым образом зависят от времени, они и тогда описывают только переход к новой, в этом случае уже нестационарной, градуировке одной и той же системы отсчета.

29. Базис системы отсчета и его отображение

Как мы уже отмечали, базис системы отсчета можно представить себе в виде множества движущихся тел (в пределе — материальных точек), с каждым из которых связан периодический процесс — часы.

В движении тел должна быть некоторая упорядоченность. Так, например, хаотически движущиеся молекулы газа определенно не могут быть приняты за базис системы отсчета. Между телами базиса не должно быть столкновений. Кроме того, во избежание излишних усложнений, они должны быть так подобраны, чтобы в одинаковом силовом поле все они приобретали одинаковое ускорение. Например, если силовое поле электромагнитное, то все тела базиса должны иметь одинаковое отношение заряда к массе. В случае гравитационного поля такая «стандартизация» всегда имеет место (принцип эквивалентности).

---

[1] Далее, в разделе 30 рассматриваются те специальные условия, которые следует наложить на координатные тетрады и координатную сетку, чтобы последние получили известный физический смысл.

Предположим, что в многообразии введена какая-то метрика, хотя мы еще ничего не можем сказать о компонентах метрического тензора $g_{\mu\nu}$, но формально уже можем записать квадрат элемента длины интервала в произвольных координатах.

Тогда история движения базиса геометрически отобразится конгруэнцией мировых линий, дифференциальной характеристикой которой будет поле единичных касательных векторов $u^\mu = dx^\mu/ds$, т. е. поле 4-скоростей базисных тел.

Конгруэнция мировых линий и поле скоростей u^μ еще не полностью отображают базис (или локальных наблюдателей), как это иногда считают [32], [33]. Поле u^μ, конечно, задает распределение скоростей базисных тел и направления локальных осей времени наблюдателей, связанных с базисными телами, но здесь не отображено одно существенное свойство базисных тел как физических реперов — наличие еще трех физически выделенных направлений. Сейчас не существенно, каким способом выделены эти три направления в каждом базисном теле, не существенно их относительное расположение, важно лишь то, что с каждым базисным телом в любой момент времени связаны три пространственных инвариантных направления. Это вместе с временноподобным вектором составляет уже четыре инвариантных направления. Геометрически этот абсолютный факт мы отобразим в виде поля инвариантных тетрад (см. раздел (12)

$$\{O,\ \mathbf{n}_{(\alpha)}\}, \qquad \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{29. 1}$$

в которых векторы с индексом нуль задают конгруэнцию мировых линий, т. е. $\mathbf{n}_{(0)} = \mathbf{u}$.

Эти тетрады, инвариантные относительно обеих групп преобразований (A) и (B), отображают инвариантный факт существования и относительного движения физических реперов—базисных тел системы отсчета.

Кроме инвариантной тетрады (29. 1), в каждой точке имеется координатная (градуировочная) тетрада (27. 1), которая в частном случае, конечно, может совпадать с инвариантной.

Мы предположили, что в многообразии задана какая-то, пока неизвестная, метрика. Это значит, что в каждой пространственно-временно́й точке предполагается еще заданным аффинный репер, через векторы которого определяется метрика в соответствии с (6. 1)

$$\{O,\ \mathbf{e}_\mu\}, \qquad \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = g_{\mu\nu}. \tag{29. 2}$$

Поэтому векторы инвариантной тетрады (29. 1) в каждой точке могут быть отнесены как к тетраде (27. 1), так и к аффинному реперу (29. 2). Тогда ортонормированность тетрад (29. 1) можно записать, например, в таком виде:

$$\begin{gathered} g_{\mu\nu} n^\mu_{(\alpha)} n^\nu_{(\beta)} = \eta_{(\alpha)(\beta)}, \qquad g^{\mu\nu} n^{(\alpha)}_\mu n^{(\beta)}_\nu = \eta^{(\alpha)(\beta)}, \\ \eta_{(\alpha)(\beta)} = \eta^{(\alpha)(\beta)} = \operatorname{diag}\{+1,\ -1,\ -1,\ -1\}, \end{gathered} \tag{29. 3}$$

где $\eta_{(\alpha)(\beta)}$ и $\eta^{(\alpha)(\beta)}$ — инвариантные диагональные матрицы. Это же самое можно выразить и через ортогональные компоненты, относя векторы $\mathbf{n}_{(\alpha)}$ и $\mathbf{n}^{(\alpha)}$ к координатной тетраде (27. 1). Тогда получим

$$\eta_{ab} n^a_{(\alpha)} n^b_{(\beta)} = \eta_{(\alpha)(\beta)}, \qquad \eta^{ab} n^{(\alpha)}_a n^{(\beta)}_b = \eta^{(\alpha)(\beta)}. \tag{29. 4}$$

Допустим, что в этой же области определена другая система отсчета, тогда отображением ее базиса будет новое поле инвариантных тетрад

$$\{O,\ \mathbf{n}'_{(\alpha)}\}. \tag{29. 5}$$

Теперь в каждой мировой точке будут две инвариантные тетрады (29. 1) и (29. 5), причем относительная ориентация векторов $\mathbf{n}_{(0)}$ и $\mathbf{n}'_{(0)}$ отображает, очевидно, скорость относительного движения базисов в данной точке [1].

Из этой картины следует, что переход от одной системы отсчета к другой должен быть как-то связан с преобразованием поля тетрад (29. 1) в поле (29. 5). Совершенно ясно, что ни преобразованиями координат (группа (A)), ни преобразованиями координатных тетрад (группа (B)) это сделать невозможно, ибо поля инвариантных тетрад заданы независимо от этих групп преобразований.

Операция, связывающая поля этих тетрад, должна быть, очевидно, также инвариантной. Обозначим эту операцию через Ω, тогда связь векторов тетрад (29. 1) и (29. 5) запишется

$$\mathbf{n}' = \Omega \mathbf{n}, \qquad \mathbf{n} = \tilde{\Omega} \mathbf{n}', \qquad \Omega \tilde{\Omega} = 1. \tag{29. 6}$$

Эта инвариантная операция называется аффинором. В общем случае аффинор будет локальным, т. е. зависящим от координат, преобразующим одно неоднородное векторное поле в другое [2].

Поле инвариантных тетрад $\{O,\ \mathbf{n}\,(\alpha)\}$, отображающее историю базиса системы отсчета, отображает вместе с тем историю локальных «физических лабораторий» с масштабами, измерительными приборами, наблюдателями или автоматами, их заменяющими.

Непосредственной задачей наблюдателей или соответствующих автоматов является фиксирование различных пространственно-временных совпадений, к которым, как отметил Эйнштейн, в сущности сводятся любые измерения. Результаты измерений, выполненных в «локальной лаборатории», геометрически будут отображаться, очевидно, проекциями тензоров (представляющих физические величины) на оси инвариантной или совпадающей с ней собственной координатной тетрады [3].

---

[1] Отсюда видно, что относительное движение двух тел есть факт абсолютный.

[2] Как увидим далее, такой однозначный аффинор существует не всегда, например для неинерциальных систем такого аффинора не существует.

[3] Только такие проекции, как известно, имеют физический смысл.

Видно, что основной недостаток приводившихся ранее описаний систем отсчета состоял в том, что эти описания связывались либо с координатной сеткой, либо с координатными (градуировочными) тетрадами.

Если в каждой точке заданы два репера, то аффинор, преобразующий одно реперное поле в другое, может быть определен однозначно. На примере инерциальных систем отсчета мы покажем, как это делается.

30. Инерциальные системы отсчета

Базисы реальных систем отсчета в большей или меньшей степени подвержены действию силовых полей. Во всяком случае, воздействие гравитационного поля всегда имеет место, поэтому реальные системы отсчета, в сущности, всегда ускоренные, т. е. неинерциальные. Но если воздействие силовых полей пренебрежимо мало (находится за пределами точности измерений), то такую систему отсчета можно рассматривать в некоторой пространственно-временно́й области как инерциальную.

Мы видим, что ИСО — идеальная система отсчета, к которой стремится любая реальная по мере освобождения от действия внешних сил. Но это ни в коем случае не означает, что ИСО лишена физического содержания. Абсолютный нуль температуры тоже не теряет своего смысла только оттого что к нему можно приблизиться лишь в пределе [1].

Если внешнее силовое поле достаточно мало, то, пренебрегая взаимодействием тел базиса [2], можно считать, что тела базиса, т. е. физические реперы, либо находятся в относительном покое, либо в относительном инерциальном движении со скоростями, распределенными по некоторому закону. В первом случае мы имеем базис обычной «жесткой» ИСО, во втором случае — квази-ИСО или обобщенной ИСО [34], [35].

Рассмотрим обычную «жесткую» ИСО, которую обозначим через (S). Физические реперы такой ИСО, т. е. базисные тела, находятся в относительном покое, тогда их история отображается (но еще не полностью) конгруэнцией параллельных прямых мировых линий, проведенных в некотором произвольном направлении.

Возможность построения конгруэнций параллельных прямых сразу приводит к целому ряду важных следствий. Прежде всего, точечное многообразие, допускающее конгруэнции параллельных

---

[1] ИСО можно также рассматривать как своеобразный абсолютный нуль — начало отсчета при измерении любых полей. Более того, любую НСО локально в бесконечно малой окрестности мировой точки можно рассматривать как ИСО.

[2] Их во многих случаях можно рассматривать как пробные частицы. В общем случае пренебрежение недопустимо и такая система тел уже не может рассматриваться как базис ИСО.

прямых линий, будет плоским. А это, в свою очередь, значит, что все локальные касательные к многообразию пространства сливаются в единое плоское пространство с псевдоэвклидовой метрикой, в котором введена, например, галилеева система координат X^a[1].

Здесь может возникнуть следующий вопрос: каков физический смысл утверждения, что многообразие, на которое мы отображаем градуировку ИСО, есть плоское? Понятие плоское или искривленное пространство — это понятие геометрическое, и означает оно тот факт, что некоторое инвариантное свойство пространства — его кривизна (см. разделы 3 и 4) в разных точках будет либо равна нулю, либо отлична от нуля. Если кривизна везде одна и та же [2], то такое пространство называется однородным. Однородное пространство, допускающее, кроме того, конгруэнции прямых параллельных линий, может быть только плоским. С физической точки зрения это означает, что в соответствующей области пространства (физического) и времени невзаимодействующие тела могут находиться в относительном покое (мировые линии параллельны). А это, в свою очередь, говорит об отсутствии внешних силовых полей. С этого предположения мы и начали рассмотрение ИСО.

Базис системы (S), точнее его история, полностью отобразится, очевидно, полем инвариантных тетрад (29. 1), векторы $\mathbf{n}_{(0)}$ которых образуют однородное поле 4-скоростей $\mathbf{u}$ базисных тел. При этом декартовы триады образуют, вообще говоря, неоднородное поле, отображая тем самым различную локальную (чисто пространственную) ориентацию физических реперов — базисных тел.

Предположим теперь, что наряду с первой имеется вторая «жесткая» ИСО, которую обозначим через (S'), ее базис отобразится другим полем инвариантных тетрад (29. 5), где векторы $\mathbf{n}'_{(0)}$ образуют новое однородное поле 4-скоростей $\mathbf{u}'$, а декартовы триады, как и в первом случае, представляют собой также неоднородное поле.

Таким образом, мы имеем два различных поля тетрад и, следовательно, в каждой мировой точке имеются две инвариантные тетрады

$$\{O,\ \mathbf{n}_{(\alpha)}\}, \qquad \{O,\ \mathbf{n}'_{(\alpha)}\}, \tag{30. 1}$$

обладающие следующим свойством:

$$\partial \mathbf{n}_{(0)}/\partial X^a = \partial \mathbf{n}'_{(0)}/\partial X^a = 0. \tag{30. 2}$$

Векторы этих тетрад можно отнести к однородному полю координатных тетрад $\{O,\ \mathbf{e}_a\}$, которое в плоском пространстве всегда может быть построено; тогда (30. 1) запишется

$$\{O,\ n^a_{(\alpha)}\}, \qquad \{O,\ \tilde{n}^a_{(\alpha)}\}. \tag{30. 3}$$

---

[1] Таким образом, исходя из физических соображений, мы конкретизировали для данного случая метрику $g_{\mu\nu}$, введенную в предыдущем разделе.

[2] Пространства постоянной кривизны.

Вводя поля взаимных тетрад, согласно (12. 2), аффинор, связывающий тетрады (30. 3), можно представить в двух формах: или, в соответствии с (13. 11), в виде инвариантной матрицы, действующей на номера тетрадных векторов и сохраняющей номер компоненты,

$$\Omega_{(\alpha)}^{\cdot(\beta)} = \tilde{n}_{(\alpha)}^{c} n_{c}^{(\beta)}, \qquad \tilde{n}_{(\alpha)}^{a} = \Omega_{(\alpha)}^{\cdot(\beta)} n_{\beta}^{a}, \tag{30. 4}$$

или, согласно (13. 16), в виде тензора второго ранга, действующего на номера компонент и оставляющего номер тетрадного вектора неизменным,

$$\Omega_{\cdot a}^{b} = \tilde{n}_{a}^{(\gamma)} n_{(\gamma)}^{b}, \qquad \tilde{n}_{(\alpha)}^{a} = \Omega_{b}^{\cdot a} n_{(\alpha)}^{b}. \tag{30. 5}$$

Таким образом, если тетрады (30. 3) будут заданы, то аффинор определится однозначно [1].

Аффинор (30. 5), в сущности, и есть преобразование Лоренца, связывающее две ИСО (точнее, два отображения ИСО), его мы назовем лоренцевым аффинором. Этот аффинор, конечно, является общековариантным относительно обеих групп преобразований (A) и (B) тензором. Свертывая (30. 5) с коэффициентами Ламэ h_{a}^{μ} и h_{ν}^{b}, мы можем преобразование Лоренца записать в произвольной координатной сетке

$$\tilde{n}_{(\alpha)}^{\mu} = \Omega_{\nu}^{\cdot\mu} n_{(\alpha)}^{\nu}. \tag{30. 6}$$

Рассмотрим теперь частные случаи лоренцева аффинора. Первое упрощение сделаем, предположив, что декартовы триады в (S) образуют однородное поле. Это значит, что все базисные тела в (S) ориентированы друг относительно друга совершенно одинаково и различаются только параллельными сдвигами. А так как векторы $\mathbf{n}_{(0)}$, согласно (30. 2), образуют тоже однородное поле, то и вся система (S) отображается однородным полем тетрад.

Предположим далее, что и (S') также отображается однородным полем тетрад, тогда аффинор (30. 5) должен преобразовывать одно однородное поле тетрад в другое, тоже однородное. Учитывая еще тот факт, что аффинор (30. 5) отнесен к однородному полю координатных тетрад, мы приходим к заключению, что компоненты аффинора $\Omega_{\cdot b}^{a}$ должны быть постоянными.

Далее предположим, что поля инвариантных тетрад, отображающие (S) и (S'), отличаются только вследствие относительного движения систем отсчета, т. е. если векторные поля $\tilde{n}_{(0)}^{a}$ и $n_{(0)}^{a}$ окажутся совпадающими, то и поля декартовых триад тоже совпадут. Это значит, что (30. 5) будет «чистым» преобразованием Лоренца, не содержащим дополнительного поворота декартовых триад. Обозначим компоненты такого аффинора через $L_{\cdot b}^{a}$. В этом случае они будут функциями только 4-скоростей $u^{a} = n_{(0)}^{a}$ и

---

[1] Из (30. 4) и (30. 5) видно, что подъем и опускание индексов производится с помощью матрицы $\eta_{(\alpha)(\beta)}$, $\eta^{(\alpha)(\beta)}$ и метрики η_{ab}, η^{ab}.

$\tilde{u}^a = \tilde{n}^a_{(0)}$. Определим явный вид этих компонент. Они, очевидно, должны удовлетворять следующим равенствам:

$$u^a = L^{a}_{\cdot b}\tilde{u}^b, \quad \tilde{u}^a = L_b^{\cdot a} u^b, \qquad \eta_{ab} = \eta_{a'b'} L_a^{\cdot a'} L_b^{\cdot b'}; \tag{30. 7}$$

первые два из них — прямое и обратное преобразования полей 4-скоростей базисных тел, третье равенство — условие ортогональности преобразования.

Кроме того, аффинор должен сводиться к тождественному преобразованию при совпадении полей 4-скоростей, т. е. если $\tilde{u}^a = u^a$, то

$$L_b^{\cdot b} = L^{b}_{\cdot a} = \delta^b_a. \tag{30. 8}$$

Искомый аффинор представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} L_a^{\cdot b} &= A\delta^b_a + Bu_a u^b + B_1 \tilde{u}_a \tilde{u}^b + C\tilde{u}_a u^b + C_1 u_a \tilde{u}^b, \\ L^{a}_{\cdot b} &= A\delta^a_b + Bu^a u_b + B_1 \tilde{u}^a \tilde{u}_b + C\tilde{u}^a u_b + C_1 u^a \tilde{u}_b, \end{aligned} \tag{30. 9}$$

где A, B, B_1, C, C_1 — скалярные функции скоростей u^a и $\tilde{u}^a$.

Равенства (30. 7) и (30. 8) однозначно приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} L_a^{\cdot b} &= \delta^b_a - \frac{1}{1+p}(u_a u^b + \tilde{u}_a \tilde{u}^b + u_a \tilde{u}^b + \tilde{u}_a u^b) + 2u_a \tilde{u}^b, \\ L^{a}_{\cdot b} &= \delta^a_b - \frac{1}{1+p}(u^a u_b + \tilde{u}^a \tilde{u}_b + u^a \tilde{u}_b + \tilde{u}^a u_b) + 2u^a \tilde{u}_b, \end{aligned} \tag{30. 10}$$

где

$$p = u^c \tilde{u}_c. \tag{30. 11}$$

Это и есть наиболее общее выражение для компонент лоренцева аффинора, не содержащего дополнительного поворота декартовых триад.

Если поля скоростей u^a и $\tilde{u}^a$ совпадают, то, согласно (30. 11), $p=1$ и выражения (30. 10) переходят в компоненты тождественного преобразования.

Аффинор Лоренца (30. 10), используя (30. 5), можно представить в следующем виде:

$$L_a^{\cdot b} = u_a \tilde{u}^b + {}^*L_a^{\cdot b}, \quad {}^*L_a^{\cdot b} = n_a^{(k)} \tilde{n}^b_{(k)}, \tag{30. 12}$$

при этом, очевидно, имеют место такие равенства:

$${}^*L_a^{\cdot b}\tilde{u}_b = 0, \qquad {}^*L_a^{\cdot b} u^a = 0. \tag{30. 13}$$

Явный вид аффинора ${}^*L_a^{\cdot b}$ следующий:

$${}^*L_a^{\cdot b} = \frac{1}{1+p}\{\varepsilon_a^c \xi_c^b + p\,{}^*\varepsilon_a^{\cdot b}\}, \tag{30. 14}$$

где

$$\xi_c^b = \delta_c^b - \tilde{u}^b \tilde{u}_c, \qquad \varepsilon_a^c = \delta_a^c - u^c u_a, \qquad {}^*\varepsilon_a^{\cdot b} = \delta_a^b - \frac{\tilde{u}_a u^b}{p} \tag{30. 15}$$

являются тензорами проектирования на гиперплоскость одновременности первой и второй ИСО, при этом ${}^*\varepsilon_a^{\cdot b}$ — смешанный тензор проектирования.

Пусть некоторый вектор $\mathbf{l}$ ортогонален как вектору $\mathbf{u}$, так и $\mathbf{u}'$, т. е.

$$u_a l^a = \tilde{u}^a l_a = 0 \text{ [1]}, \tag{30. 16}$$

тогда (30. 12) дает

$$L_a^{\cdot b} l_b = {}^*L_a^{\cdot b} l_b, \qquad L_a^{\cdot b} l^a = {}^*L_a^{\cdot b} l^a. \tag{30. 17}$$

Далее, воспользовавшись выражением (30. 14), так же легко показать, что

$${}^*L_a^{\cdot b} l_b = l_a, \qquad {}^*L_a^{\cdot b} l^a = l^b, \tag{30. 18}$$

это значит, что аффиноры (30. 12) и (30. 14) не меняют вектора, если он одновременно ортогонален векторам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$, т. е. ортогонален плоскости P, задаваемой этими векторами. Так как гиперболический поворот, осуществляемый лоренцевым аффинором, происходит в двумерной плоскости P, то вектор $\mathbf{l}$ будет одной из осей вращения. Все оси вращения, очевидно, образуют двумерную плоскость, остающуюся инвариантной при этих поворотах.

Дальнейшее упрощение аффинора (30. 10) будет связано с подходящим выбором поля координатных тетрад $\{O, \mathbf{e}_a\}$. Не нарушая общности, мы можем их совместить с полем инвариантных тетрад $\{O, \mathbf{n}_{(\alpha)}\}$, отображающих систему (S), т. е. мы полагаем

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{n}_{(a)}, \tag{30. 19}$$

этим самым мы выбрали определенную B-градуировку системы отсчета [2]. В силу равенств (30. 19) и того, что $n^a_{(0)} = u^a$, получаем следующие значения компонент 4-скорости u^a:

$$u_0 = u^0 = 1, \qquad u^k = -u_k = 0, \qquad p = u^a \tilde{u}_a = \tilde{u}_0, \tag{30. 20}$$

т. е. при такой B-градуировке мы приняли систему (S) за неподвижную — за начало отсчета относительных скоростей [3].

Представляя векторы $\mathbf{n}_{(\alpha)}$ через векторы координатной тетрады $\mathbf{e}_a$

$$\mathbf{n}_{(\alpha)} = n^a_{(\alpha)} \mathbf{e}_a \tag{30. 21}$$

и учитывая (30. 19), находим

$$n^a_{(\alpha)} = \delta^a_\alpha. \tag{30. 22}$$

---

[1] Этими условиями вектор еще не определяется однозначно. Две компоненты останутся неопределенными.

[2] Такая B-градуировка называется собственной.

[3] Такую систему отсчета иногда называют лабораторной.

В силу равенств (30. 20) лоренцев аффинор (30. 10) примет следующий вид:

$$L^{a}_{\cdot b}=\begin{pmatrix} L^{0}_{\cdot 0} & L^{0}_{\cdot k} \\ L^{m}_{\cdot 0} & L^{m}_{\cdot k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{u}_0 & \tilde{u}_k \\ -\tilde{u}^m & \delta^m_k-\dfrac{\tilde{u}^m\tilde{u}_k}{1+\tilde{u}_0}\end{pmatrix}, \tag{30. 23}$$

$$L^{\cdot b}_{a}=\begin{pmatrix} L^{\cdot 0}_{0} & L^{\cdot 0}_{k} \\ L^{\cdot m}_{0} & L^{\cdot m}_{k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{u}_0 & -\tilde{u}_k \\ \tilde{u}^m & \delta^m_k-\dfrac{\tilde{u}^m\tilde{u}_k}{1+\tilde{u}_0}\end{pmatrix}. \tag{30. 24}$$

Запишем, согласно (30. 5), общее выражение для лоренцева аффинора

$$L^{\cdot a}_{b}=\tilde{n}^{a}_{(\sigma)}n^{(\sigma)}_{b}, \qquad \tilde{n}^{a}_{(\alpha)}=L^{\cdot a}_{b}n^{b}_{(\alpha)}, \tag{30. 25}$$

подставляя во второе равенство выражение (30. 22), находим

$$L^{\cdot a}_{\alpha}=\tilde{n}^{a}_{(\alpha)}, \tag{30. 26}$$

т. е. в этом случае компоненты аффинора численно равны проекциям векторов инвариантных тетрад, отображающих систему (S') на тетрады системы (S). Точно так же найдем равенства и для ковариантных компонент

$$L^{\alpha}_{\cdot a}=\tilde{n}^{(\alpha)}_{a}. \tag{30. 27}$$

Пусть 3-вектор скорости движения системы (S') относительно (S) будет $\mathbf{v}$, тогда в принятой B-градуировке будем иметь [1]

$$\tilde{u}_k=-\tilde{u}^k=\frac{-v_k}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \tilde{u}_0=\tilde{u}^0=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$\beta=\frac{v}{c}, \qquad v^2=\sum_k v_k^2. \tag{30. 28}$$

Подставляя это в (30. 23) и (30. 24), мы получим хорошо известные коэффициенты преобразования Лоренца для произвольного направления скорости относительного движения ИСО

$$L^{a}_{\cdot b}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\dfrac{v_k}{c\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{-v^m}{c\sqrt{1-\beta^2}} & \delta^m_k+\varkappa\dfrac{v_k v^m}{v^2}\end{pmatrix}, \qquad \varkappa=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1,\ v^k=v_k, \tag{30. 29}$$

$$L^{\cdot b}_{a}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{v_k}{c\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{v^m}{c\sqrt{1-\beta^2}} & \delta^m_k+\varkappa\dfrac{v_k v^m}{v^2}\end{pmatrix}. \tag{30. 30}$$

[1] Латинские индексы k, l, m, n, ... в этом разделе следовало бы взять в скобки, ибо они галилеевы. Но так как здесь не введена криволинейная сетка x^μ, то ради простоты скобки опускаем и сохраняем их только у инвариантных индексов тетрады, например в (30.25).

Сравнивая (30. 28) и (30. 20), видим, что параметр p, характеризующий относительную ориентацию 4-скоростей $\tilde{u}^a$ и u^a, вместе с тем определяет модуль скорости относительного движения двух ИСО

$$v = \frac{c}{p}\sqrt{p^2 - 1}. \tag{30. 31}$$

Введем новое однородное поле координатных тетрад $\{O, \mathbf{e}_{a'}\}$, совпадающее с полем инвариантных тетрад $\{O, \mathbf{n}'_{(\alpha)}\}$. Это значит, что мы ввели в системе (S') свою собственную B-градуировку.

Тогда аналогично (30. 19) можем написать

$$\mathbf{e}_{a'} = \mathbf{n}'_{(a)}. \tag{30. 32}$$

Из закона преобразования (30. 25) и из равенств (30. 32) и (30. 19) следует, что координатные реперы, принадлежащие системам (S) и (S'), связаны преобразованием Лоренца

$$\mathbf{e}_{a'} = L^{\cdot a}_{a'}\mathbf{e}_a, \qquad \mathbf{e}_a = L^{a'}_{\cdot a}\mathbf{e}_{a'}. \tag{30. 33}$$

Мы знаем, что с каждым полем координатных реперов, по определению, связана собственная система координат, отображающая некоторую A-градуировку системы отсчета. В нашем случае это будут две собственные галилеевы координатные сетки X^a и $X^{a'}$, связанные, очевидно, линейным преобразованием, коэффициенты которого совпадают с компонентами лоренцева аффинора

$$X^{a'} = L^{a'}_{\cdot a}X^a, \qquad X^a = L^{\cdot a}_{a'}X^{a'}. \tag{30. 34}$$

Это преобразование называется координатным преобразованием Лоренца.

При выбранной нами A- и B-градуировке галилеевы координаты получают хорошо известный физический смысл: $X^0 = ct$, $X^{0'} = ct'$ определяют собственное время в системах $(S), (S')$, X^k, $X^{k'}$ — пространственные координаты точки, измеренные масштабами, покоящимися в соответствующей ИСО. В этом случае преобразования (30. 34) связывают время и пространственные координаты инерциально движущихся систем отсчета и дают много ценной информации о связи свойств пространства, времени и движения, рассматриваемых в СТО.

Отметим, что сами по себе преобразования (30. 34) представляют частный линейный случай группы (A) и описывают только изменение нумерации мировых точек.

Преобразования (30. 34) получают физический смысл только в том случае, когда координатные сетки поля координатных и инвариантных тетрад жестко связаны между собой собственной A- и B-градуировкой. При этом мы имеем совпадение трех геометрических объектов: компонент лоренцева аффинора $L_a^{\cdot b}$, компонент $\omega_a^{\cdot b}$ аффинора, преобразующего координатные тетрады (группа (B)), и коэффициентов $\omega^{\cdot a}_{a'}$ линейного преобразования галилеевых систем координат (группа (A)).

Этим и обусловливается физический смысл координатных преобразований Лоренца (30. 34), а также разъясняется кажущееся противоречие (см. конец раздела 28) между физическим и геометрическим смыслом координатных преобразований Лоренца.

Галилеевы координаты X^a, в полном соответствии с их основным назначением, отображают нумерацию (перечисление) мировых точек. Осуществляется эта нумерация практически, как мы говорили, путем измерения промежутков времени и расстояний часами и масштабами, принадлежащими ИСО. Поэтому координаты X^a получают двойной смысл: геометрический — указывают номер мировой точки, физический — указывают момент времени и расстояния по осям от начала отсчета.

Если мы подвергнем координатные тетрады $\{O, \mathbf{e}_a\}$ и сетку X^a некоторым преобразованиям группы (B) и (A)

$$\mathbf{e}_{a'} = \omega_{a'}^{\cdot a} \mathbf{e}_a, \qquad X^{a'} = \omega_{\cdot a}^{a'} X^a, \tag{30. 35}$$

т. е. введем новую A- и B-градуировку в той же самой ИСО, то новые координаты $X^{a'}$ будут так же хорошо отображать нумерацию мировых точек, как и координаты X^a. Но теперь координаты $X^{a'}$ уже нельзя истолковать как промежутки времени и расстояния, измеренные часами и масштабами, принадлежащими данной ИСО.

Однако в некоторой другой системе отсчета, действительной или воображаемой, для которой $X^{a'}$ и $\{O, \mathbf{e}_{a'}\}$ окажутся случайно собственной A- и B-градуировкой [1], координаты $X^{a'}$ все еще могут иметь смысл промежутков времени и расстояния.

Если же мы подвергнем галилеевы координаты и координатные тетрады произвольным нелинейным преобразованиям

$$x^{\mu} = f^{\mu}(X^a), \qquad \mathbf{e}_{\mu} = \frac{\partial X^a}{\partial x^{\mu}} \mathbf{e}_a, \tag{30. 36}$$

то полностью потеряем возможность физического истолкования координат X^{μ}, хотя нумерацию мировых точек они по-прежнему будут отображать хорошо, а в некоторых случаях могут оказаться даже более удобными, чем галилеевы координаты.

Сделаем еще один шаг на пути упрощения компонент лоренцева аффинора. Совместим инвариантное направление, задаваемое вектором $\mathbf{n}_{(1)} = \mathbf{e}_1$, с 3-вектором $\mathbf{v}$ скорости движения системы (S') относительно (S) [1]. Это значит, что (S') движется в положительном направлении оси X^1 системы (S). Тогда вектор $\mathbf{v}$, отнесенный к координатной триаде $\{O, \mathbf{e}_k\}$, будет иметь следующие компоненты:

$$v_1 = v, \;\; v_2 = v_3 = 0. \tag{30. 37}$$

---

[1] Действительно, любая градуировка данной системы отсчета может быть осуществлена практически подходящим выбором некоторого другого базиса, для которого она будет собственной, точно так же, как любой набор делений на шкале вольтметра может быть всегда реализован подходящим выбором прикладываемого напряжения.

Подставляя это в (30. 29) и (30. 30), мы получаем обычный частный вид лоренцева аффинора

$$L^{a}_{\cdot b}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0\\ \frac{-3}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0\\ 0 & 0 & \delta^p_q\end{pmatrix},\qquad L^{\cdot b}_{a}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0\\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0\\ 0 & 0 & \delta^p_q\end{pmatrix},\tag{30. 38}$$

$$p,\ q=2,\ 3.$$

Координатные преобразования Лоренца (30. 34) теперь можно представить таким образом:

$$\begin{aligned}X^{0'}&=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(X^0-\beta X^1),\qquad X^{2'}=X^2,\\ X^{1'}&=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(X^1-\beta X^0),\qquad X^{3'}=X^3,\end{aligned}\tag{30. 39}$$

со всеми вытекающими из них следствиями.

До сих пор мы рассматривали лоренцев аффинор L, не содержащий дополнительного вращения декартовых триад. Рассмотрим теперь общий вид аффинора, содержащего эти вращения.

Подвергнем инвариантные тетрады $\{O,\ n^{a}_{(\alpha)}\}$ и $\{O,\ \tilde{n}^{a}_{(\alpha)}\}$ следующему преобразованию:

$$\tilde{n}^{b}_{(\alpha')}=\underset{1}{\omega}{}^{\cdot(\alpha)}_{(\alpha')}\tilde{n}^{b}_{(\alpha)},\qquad \tilde{n}^{(\alpha')}_{a}=\underset{2}{\omega}{}^{(\alpha')}_{\cdot(\beta)}n^{(\beta)}_{a},\tag{30. 40}$$

где матрицы $\underset{1}{\omega}$ и $\underset{2}{\omega}$ имеют специальный вид

$$\underset{q}{\omega}{}^{\cdot(\beta)}_{(\alpha)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \underset{q}{\omega}{}^{\cdot(m)}_{(k)}\end{pmatrix},\qquad q=1,\ 2,\quad k,\ m=1,\ 2,\ 3,\tag{30. 41}$$

и описывают, как известно, поворот декартовых триад. Тогда аффинор, построенный из векторов (30. 40), запишется

$$\Omega^{\cdot b}_{a}=n^{(\alpha')}_{a}\tilde{n}^{b}_{(\alpha')}=\omega^{\cdot(\alpha)}_{(\beta)}n^{(\beta)}_{a}\tilde{n}^{b}_{(\alpha)},\tag{30. 42}$$

где

$$\omega^{\cdot(\alpha)}_{(\beta)}=\underset{2}{\omega}{}^{(\alpha')}_{\cdot(\beta)}\underset{1}{\omega}{}^{\cdot(\alpha)}_{(\alpha')}.\tag{30. 43}$$

Матрица (30. 43) определяет, очевидно, относительный поворот инвариантных декартовых триад, принадлежащих системам отсчета (S) и (S').

Таким образом, аффинор (30. 42) содержит и «чистое» преобразование Лоренца, и дополнительный поворот триад. Если $\underset{1}{\omega}=\underset{2}{\omega}$,

---

[1] Этого можно всегда достичь, так как выбор пространственных инвариантных направлений $\mathbf{n}_{(k)}$, физических реперов, не влияет на характер движения ИСО.

т. е. если оба поля триад подверглись одинаковому повороту, то их относительное расположение не изменится. Матрица (30. 43) превращается тогда в матрицу тождественного преобразования и аффинор Ω переходит в аффинор L.

Мы видим, что введение поля инвариантных тетрад для отображения базиса ИСО позволяет описать ее свойства в общековариантной относительно обеих групп преобразований (A) и (B) форме, а также уяснить геометрический смысл этих преобразований и сформулировать те условия, при которых координаты, координатные тетрады и их преобразования ((A) и (B) группы) приобретают физический смысл.

31. Неинерциальные системы отсчета

Определение НСО. Если стандартные тела (физические реперы), образующие базис системы отсчета, движутся неинерциально, т. е. подвергаются действию силового поля, то система отсчета становится неинерциальной (НСО). Ситуация здесь, по сравнению с предыдущим случаем, когда обе системы были инерциальные, резко меняется. Если раньше обе ИСО, (S) и (S'), были равноправны, любую из них можно было принять за покоящуюся (лабораторную), то теперь одна из систем, например (S'), будет неинерциальной. А это значит, что силовое поле действует на базис системы (S'), но не (S). Это является абсолютным физическим фактом, нарушающим равноправие (S) и (S').

Геометрически неравноправие (S) и (S') сказывается в том, что поле скоростей u^a базисных тел системы (S') неоднородное, ему соответствует конгруэнция искривленных мировых линий. Уравнения движения базисных тел системы (S) и (S') как пробных частиц в галилеевых координатах, введенных в (S), запишутся:

$$\frac{du^a}{ds} = 0, \qquad \frac{d\tilde{u}^a}{ds'} = f^a,$$

где f^a — вектор первой кривизны конгруэнции. Это и есть аналитическое выражение неравноправия системы отсчета.

Уравнения движения всегда можно записать в форме ковариантной относительно обеих групп преобразований (A) и (B), т. е. в любых системах координат и координатных тетрад система (S) будет инерциальной, а (S') — неинерциальной.

Таким образом, учет силового поля, обусловливающего неинерциальное движение базиса НСО, заранее обрекает на неудачу все попытки описать переход от ИСО к НСО с помощью преобразований координат или координатных тетрад.

Определение НСО, данное в начале раздела, еще недостаточно для описания геометрических свойств ее, оно должно быть дополнено каким-то более конструктивным положением. Отсутствие в современных работах по ОТО такого достаточно обоснованного

конструктивного положения служит, по-видимому, одной из причин неясностей и неопределенностей в этом вопросе. Во всяком случае до настоящего времени, несмотря на все развитие ОТО, мы, странным образом, не имеем еще общепризнанного описания важнейшего класса систем отсчета — НСО. С другой стороны, еще в 1921 году в статье «Геометрия и опыт» [41] Эйнштейн сформулировал, в сущности, все необходимое для описания НСО. Он писал: «. . . в системе отсчета, которая вращается относительно некоторой инерциальной системы, законы расположения твердых тел не соответствуют правилам эвклидовой геометрии вследствие лоренцева сокращения; таким образом, допуская равноправное существование неинерциальных систем, мы должны отказаться от эвклидовой геометрии».

Этот тезис [1] разъясняет и механизм, и природу искривления пространства-времени НСО. Наблюдатель, находящийся в НСО, обнаружит геометрию, отличную от той, с которой он имел дело, находясь в ИСО. Пространство-время НСО оказывается искривленным, и причиной этого искривления будут всевозможные лоренцевы сокращения.

Здесь, естественно, возникает следующий вопрос: во всех ли случаях искривление пространства-времени имеет такое же «лоренцево» происхождение, как в НСО, или кривизна, связанная с гравитационным полем, имеет иную природу? Принцип локальной эквивалентности говорит, по-видимому, в пользу того, что природа кривизны должна быть единой. Однако вполне обоснованный ответ может быть дан только после детального исследования геометрических свойств пространства-времени НСО.

К сожалению, по отношению к дальнейшему развитию теории относительности этот тезис Эйнштейна остался, в основном, декларативным и не был использован по своему прямому назначению. Причиной этого, возможно, было: во-первых, впечатляющие успехи ОТО, сформулированной без явного определения и описания НСО, и, во-вторых, укоренившееся неверное представление о том, что система координат всегда, во всех случаях и есть система отсчета.

В своей творческой автобиографии [42] Эйнштейн писал, что ему было «. . . не так легко освободиться от представления, что координаты имеют прямой метрический смысл». Мы к этому можем добавить, что, по-видимому, не менее трудно освободиться и от представления, широко распространенного сейчас, будто с помощью преобразования координат, произвольных или специализированных, можно описать переход от одной НСО к другой.

Приняв тезис Эйнштейна в качестве добавочного конструктивного положения, мы попытаемся описать геометрические свойства пространства-времени НСО, связанные с лоренцевыми сокращениями, в самом общем случае.

---

[1] Неоднократно проиллюстрированный в литературе на примере аномального отношения длины окружности вращающегося диска к его радиусу.

Поле базисных тетрад НСО и преобразующий аффинор. Мы снова воспользуемся тем же методом, что и при описании ИСО; поэтому прежде всего необходимо выяснить, существует ли поле инвариантных тетрад $\{O,\ \mathbf{n}'_{(\alpha)}\}$, отображающее историю движения базиса НСО.

Пусть однородное поле тетрад $\{O,\ \mathbf{n}_{(\alpha)}\}$, как и прежде, отображает базис ИСО (S), относительно которой мы будем описывать НСО (S'). Положим, что в (S) введены собственные A- и B-градуировки, согласно (30. 19), (30. 21), (30. 22), т. е.

$$\mathbf{n}_{(\alpha)} = n^a_{(\alpha)}\mathbf{e}_a, \qquad n^a_{(\alpha)} = \delta^a_\alpha, \qquad n'_{(\alpha)} = \tilde{n}^a_{(\alpha)}\mathbf{e}_a, \tag{31. 1}$$

тогда поля инвариантных тетрад через эти компоненты запишутся

$$\{0,\ n^a_{(\alpha)}\}, \qquad \{0,\ \tilde{n}^a_{(\alpha)}\}. \tag{31. 2}$$

Для того чтобы ответить на поставленный вопрос, надо попытаться фактически построить это поле, а для этого необходимо иметь закон движения и распределения ориентаций тетрад в пространстве.

С таким законом мы уже встречались. Согласно (12. 24), закон изменения тетрад в направлениях, задаваемых тетрадными векторами $\mathbf{n}'_{(\varepsilon)}$, имеет вид

$$\frac{\delta \tilde{n}^a_{(\alpha)}}{\delta s^{(\varepsilon)}} = Q^{(\beta)}_{(\varepsilon),\,(\alpha)\cdot}\tilde{n}^a_{(\beta)}. \tag{31. 3}$$

Здесь $Q^{(\beta)}_{(\varepsilon),\,(\alpha)\cdot}$ — коэффициенты вращения, представляющие собой заданные дифференцируемые функции точки.

Следует подчеркнуть, что каково бы ни было силовое поле, как бы ни были распределены тетрады в пространстве и времени, закон изменения их при переходе от точки к точке всегда будет иметь вид (31. 3). Это связано с тем, что соседние тетрады могут отличаться только четырехмерным поворотом, но это и описывается уравнениями (31. 3) [1].

Физический смысл соотношений (31. 3) раскрывается в системах (12. 26) и (12. 27), которые в галилеевых координатах запишутся

$$\begin{aligned} &\frac{\delta \tilde{n}^a_{(0)}}{\delta s^{(0)}} = f^a, \\ &\frac{\delta \tilde{n}^a_{(m)}}{\delta s^{(0)}} = \left\{\omega^{\cdot(k)}_{(m)} + \frac{1}{2} H^{\cdot(k)}_{(m)}\right\}\tilde{n}^a_{(k)} - f_{(m)}\tilde{n}^a_{(0)}, \end{aligned} \tag{31. 4}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\delta \tilde{n}^a_{(0)}}{\delta s^{(k)}} = B^{\cdot(l)}_{(k)}\tilde{n}^a_{(l)}, \\ &\frac{\delta \tilde{n}^a_{(m)}}{\delta s^{(k)}} = Q^{(l)}_{(k),\,(m)\cdot}\tilde{n}^a_{(l)} - B_{(k)(m)}\tilde{n}^a_{(0)}. \end{aligned} \tag{31. 4a}$$

---

[1] Это полезно сравнить с тем, что было сказано по поводу формул (3. 22)—(3. 27).

Система (31. 4) описывает поведение тетрады при смещении вдоль мировой линии, т. е. с течением собственного времени, так как в данном случае $\tilde{n}^a_{(0)}=\tilde{u}^a$ есть 4-вектор скорости базисного тела и $ds^{(0)}=d\overset{\circ}{s}$ — элемент собственного времени. Следовательно, (31. 4) представляет собой закон движения тетрады, где f^a — вектор первой кривизны конгруэнции (ускорение), $\omega^{\cdot(k)}_{m}$ и $H^{\cdot(k)}_{(m)}$ — угловые скорости вращения декартовых триад.

Система (31. 4а) описывает изменение (поворот) тетрады при смещениях ортогональных $\tilde{n}^a_{(0)}$, т. е. вдоль локального V_3.

Выясним теперь, в какой мере система уравнений (31. 3) определяет поле тетрад $\{O,\ \tilde{n}^a_{(\alpha)}\}$. Предположим, что искомое поле $\{O,\ \tilde{n}^a_{(\alpha)}(X)\}$ существует и компоненты $\tilde{n}^a_{(\alpha)}(X)$ — по крайней мере дважды дифференцируемые однозначные функции точки.

Тогда, переходя в (31. 3) от производных по направлениям к обычным (галилеевым) производным, получим

$$\frac{\partial \tilde{n}^a_{(\alpha)}}{\partial X^c}=Q^{(\beta)}_{c(\alpha)\cdot}\tilde{n}^a_{(\beta)} \tag{31. 5}$$

— систему уравнений для определения векторных полей $\tilde{n}^a_{(\alpha)}(X)$. Для того чтобы эта система была совместной, необходимо выполнение условий интегрируемости. Составляя их обычным образом, находим

$$2\partial_{[b}\partial_{c]}\tilde{n}^a_{(\alpha)}=\tilde{R}^{(\varepsilon)}_{bc(\alpha)\cdot}\tilde{n}^a_{(\varepsilon)}=0, \tag{31. 6}$$

где

$$\tilde{R}^{(\varepsilon)}_{bc(\alpha)\cdot}=\partial_b Q^{(\varepsilon)}_{c,(\alpha)\cdot}-\partial_c Q^{(\varepsilon)}_{b,(\alpha)\cdot}+Q^{(\varepsilon)}_{b,(\gamma)\cdot}Q^{(\gamma)}_{c(\alpha)\cdot}-Q^{(\varepsilon)}_{c,(\gamma)\cdot}Q^{(\gamma)}_{b,(\alpha)\cdot} \tag{31. 7}$$

— тензор неголономности перенесения [1].

Свертывая (31. 6) с векторами $\tilde{n}^{(\beta)}_a$ взаимной тетрады, окончательно имеем

$$\tilde{R}^{(\beta)}_{bc(\alpha)\cdot}=0. \tag{31. 8}$$

Равенство (31. 8), вообще говоря, не выполняется, поэтому система уравнений (31. 5) несовместна и искомых векторных полей, компоненты которых $\tilde{n}^a_{(\alpha)}(X)$ представляли бы собой однозначные функции точки, не существует. Следовательно, не существует и аффинора, преобразующего однородное поле тетрад $\{O,\ n^a_{(\alpha)}\}$ в неоднородное — $\{O,\ \tilde{n}^a_{(\alpha)}(X)\}$.

Мы можем еще попытаться найти приближенное выражение для поля тетрад, представив компоненты тетрадных векторов в виде ряда в окрестности любой наперед заданной точки M

$$\tilde{n}^a_{(\alpha)}(X)=a^a_{(\alpha)}+a^a_{(\alpha)c}(X^c-X^c_M)+\ldots,$$

где $a^a_{(\alpha)}$ и $a^a_{(\alpha)c}$ — постоянные коэффициенты, зависящие от выбора точки M. Задавая в точке M начальные значения компонент

[1] Смысл этого названия будет ясен из дальнейшего.

$\tilde{n}^a_{(\alpha)}(M)$ и учитывая систему (31. 5), мы легко определим коэффициенты разложения.

Тогда оно примет следующий вид:

$$\tilde{n}^a_{(\alpha)}(X) = \tilde{n}^a_{(\alpha)}(M) + Q^{(\beta)}_{c,(\alpha)\cdot}(M)\,\tilde{n}^a_{(\beta)}(M)\,(X^c - X^c_M) + \ldots \quad (31.9)$$

Полученный ряд в точке M обеспечивает наперед заданные значения компонент $\tilde{n}^a_{(\alpha)}(M)$ и тем самым задает тетраду $\{M, \tilde{n}^a_{(\alpha)}(M)\}$. Но так как в точке M определена и первая производная от $\tilde{n}^a_{(\alpha)}(X)$, то полученный ряд может описать поле тетрад вдоль любой наперед заданной не самопересекающейся кривой. При этом неточности обнаружатся только при смещении в сторону от выбранной кривой.

Попытка уточнить полученный ряд не приведет к желаемым результатам. Действительно, следующий член разложения потребует вычисления вторых производных, которые следует находить дифференцированием выражения (31. 5); это нам даст

$$\partial_b \partial_c \tilde{n}^a_{(\alpha)}(X) = \{\partial_b Q^{(\varepsilon)}_{c,(\alpha)\cdot} + Q^{(\beta)}_{c,(\alpha)\cdot} Q^{(\varepsilon)}_{b,(\beta)\cdot}\}\,\tilde{n}^a_{(\varepsilon)}.$$

Левая сторона представляет собой выражение, симметричное в индексах b, c. Следовательно, антисимметричная часть его равна нулю, однако справа антисимметричная часть не равна нулю и выражается в виде (31. 7). Таким образом, следующие производные вычислить невозможно, начинает сказываться неголономность закона изменения компонент векторов (31. 3), т. е. неголономность закона перенесения. Но, несмотря на эти трудности, поле тетрад, подчиняющихся закону движения (31. 4), построить можно, хотя его свойства при этом оказываются совсем не те, о которых мы говорили при постановке задачи.

Возможность эта основывается на том, что поле тетрад можно построить, как мы уже отмечали, вдоль любой наперед заданной кривой. Рассмотрим, как это делается.

Выберем некоторую пространственноподобную гиперповерхность $\psi(X)=0$ и определим на ней какую-нибудь систему координат $y^k = y^k(X)$, $k=1, 2, 3$. На выбранной гиперповерхности зададим поле инвариантных тетрад так, чтобы векторы $\tilde{n}^a_{(0)}$ были направлены по нормалям к гиперповерхности (этого достичь можно всегда, так как векторы $\tilde{n}^a_{(0)}$ временноподобные). Это поле тетрад будем рассматривать как начальное, поэтому на всей гиперповерхности отсчет собственного времени будем начинать с нуля, т. е. положим $\mathring{s}=0$ [1]. Построенное таким образом поле инвариантных тетрад $\{M, \tilde{n}^a_{(\alpha)}(0, y^k)\}$ отображает начальное состояние движения базиса НСО (S') относительно ИСО (S).

---

[1] Это вполне допустимо, так как локальные оси времени мы выбрали ортогональными гиперповерхности. Здесь $\mathring{s}$ — собственное время базисного тела НСО (S') в инерциальной системе отсчета.

Последующая эволюция тетрад (история движения базиса) будет описываться системой (31. 4), которая принимает теперь следующий вид:

$$\frac{d\tilde{n}^a_{(\alpha)}}{d\overset{\circ}{s}} = \Phi^a_{\cdot b}\left(\overset{\circ}{s},\ y^k\right)\tilde{n}^b_{(\alpha)}, \tag{31.10}$$

где бивектор $\Phi^a_{\cdot b}\,(\overset{\circ}{s},\ y^k)$ запишется в виде:

$$\Phi^a_{\cdot b} = Q^{(\beta)}_{c,(\alpha)\cdot}\tilde{n}^c_{(0)}\tilde{n}^{(\alpha)}_b\tilde{n}^a_{(\beta)} = Q^a_{(0),\,b\cdot},\ \ \tilde{n}^a_{(0)} = \tilde{u}^a. \tag{31.11}$$

Мы получаем, следовательно, вполне интегрируемую систему уравнений от одной независимой переменной, при этом путь интегрирования при заданных значениях y^k, т. е. мировая линия, определяется этой же системой. Действительно, положив $\alpha=0$ в системе (31. 10), находим

$$\frac{d\tilde{u}^a}{d\overset{\circ}{s}} = \Phi^a_{\cdot b}\tilde{u}^b = \overset{\circ}{f}{}^a$$

— второй закон движения. Таким образом, при заданных значениях y^k получаем поле тетрад вдоль той мировой линии, которая начинается в точке с координатами y^k. Придавая теперь координатам y^k различные значения, мы получим поле инвариантных тетрад

$$\left\{M,\ \tilde{n}^a_{(\alpha)}\left(\overset{\circ}{s},\ y^k\right)\right\} \tag{31.12}$$

во всей заданной области пространства-времени ИСО (S).

Это поле обладает рядом специфических свойств. Прежде всего оно построено вдоль мировых линий.

Далее, векторные поля $\tilde{n}^a_{(\alpha)}$ и, следовательно, тетрады не являются однозначными функциями точки, так как зависят, во-первых, от выбора конгруэнции мировых линий, которая, в свою очередь, зависит от начального распределения скоростей, и, во-вторых, от начального распределения декартовых триад [1].

Интегрируя затем уравнения

$$\frac{dX^a}{d\overset{\circ}{s}} = \tilde{u}^a\left(\overset{\circ}{s},\ y^k\right), \tag{31.13}$$

мы получим координаты всех точек M — начал тетрад — как функции собственного времени $\overset{\circ}{s}$ и параметров y^k

$$X^a = X^a\left(\overset{\circ}{s},\ y^k\right). \tag{31.14}$$

---

[1] Такие поля можно назвать неголономными, в отличие от градиентных (голономных) полей, например полей касательных векторов $\partial X^a/\partial x^\mu$ к координатным линиям x^μ некоторой голономной координатной сетки.

Эти функции выражают галилеевы координаты X^a через криволинейные — $\overset{\circ}{s}$, y^k. Обратные преобразования мы определим, воспользовавшись уравнениями координатных линий

$$y^k = y^k (X^a), \tag{31.15}$$

которые нам заранее были даны. Подставляя (31. 15) в одно из (31. 14) и разрешая его относительно $\overset{\circ}{s}$, найдем обратные преобразования

$$y^k = y^k (X^a), \qquad \overset{\circ}{s} = \overset{\circ}{s} (X^a). \tag{31.16}$$

Таким образом, поле инвариантных тетрад можно относить как к галилеевой системе координат, подставляя значения $\overset{\circ}{s}$ и y^k в (31.12)

$$\{M, \ \tilde{n}^a_{(\alpha)} (X)\}, \tag{31.17}$$

так и к криволинейной — y^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), $y^0 = \overset{\circ}{s}$, преобразуя галилеевы компоненты $\tilde{n}^a_{(\alpha)}$ в криволинейные $\tilde{n}^\mu_{(\alpha)}$

$$\{M, \ \tilde{n}^\mu_{(\alpha)} (y)\}. \tag{31.18}$$

Всей полученной картине может быть дана простая геометрическая интерпретация.

Свертывая (31. 3) с $\delta s^{(\varepsilon)}$, мы имеем

$$\delta \tilde{n}^a_{(\alpha)} = Q^{(\beta)}_{(\varepsilon),\,(\alpha).} \tilde{n}^a_{(\beta)} \delta s^{(\varepsilon)} = Q^a_{c,\,b.} \tilde{n}^b_{(\alpha)} dX^c, \qquad \delta s^{(\varepsilon)} = \tilde{n}^{(\varepsilon)}_c dX^c,$$

определяя затем операцию $d_p \tilde{n}^a_{(\alpha)} = -\delta \tilde{n}^a_{(\alpha)}$, находим

$$d_p \tilde{n}^a_{(\alpha)} = - Q^a_{c,\,b.} \tilde{n}^b_{(\alpha)} dX^c = -{}^*\Gamma^a_{cb} \tilde{n}^b_{(\alpha)} dX^c. \tag{31.19}$$

Если мы сравним это с законом параллельного переноса контравариантных компонент $\tilde{n}^a_{(\alpha)}$ вектора в пространстве аффинной связности (3. 7), в котором введены галилеевы метрика η_{ab} и система координат X^a, то, согласно (3. 20)—(3. 24), выражение (31. 19) в точности дает закон параллельного переноса. В этом случае он определяется, согласно (3. 21), только кручением.

При этом параллельный перенос происходит вдоль геодезических пространства аффинной связности. В этом легко убедиться, положив в (31. 19) $\alpha = 0$, тогда получим

$$\tilde{n}^a_{(0)} \equiv \tilde{u}^a, \qquad \tilde{u}^c = \frac{dX^c}{d\overset{\circ}{s}}, \qquad \frac{d\tilde{u}^a}{d\overset{\circ}{s}} + {}^*\Gamma^a_{cb} \tilde{u}^c \tilde{u}^b = 0. \tag{31.20}$$

Но тогда тензор неголономности перенесения (31. 7) оказывается просто тензором кривизны пространства аффинной связности (3. 33), в котором метрическая часть равна нулю (метрика галилеева), а неметрическая — определяется кручением.

В результате в каждой мировой точке M мы имеем теперь две тетрады

$$\{M, \ n^a_{(\alpha)}\}, \qquad \{M, \ \tilde{n}^a_{(\alpha)} (X_M)\}, \tag{31.21}$$

принадлежащие ИСО (S) и НСО (S') соответственно, тогда аффиноры, связывающие эти поля, можно записать, согласно (13. 11), в виде скалярных матриц

$$\Omega_{(\alpha)}^{\cdot(\beta)} = \tilde{n}^a_{(\alpha)}(X)\, n^{(\beta)}_a, \qquad \Omega^{(\alpha)}_{\cdot(\beta)} = \tilde{n}^{(\alpha)}_a(X)\, n^a_{(\beta)} \tag{31. 22}$$

или, согласно (13.16), в виде тензоров второго ранга

$$\Omega^b_{\cdot a} = \tilde{n}^{(\alpha)}_a(X)\, n^b_{(\alpha)}, \qquad \Omega_b^{\cdot a} = \tilde{n}^a_{(\alpha)}(X)\, n^{(\alpha)}_b. \tag{31. 23}$$

Но так как в ИСО (S) введена собственная B-градуировка, т. е. имеют место равенства (31. 1), то выражения (31. 23) примут следующий более простой вид:

$$\Omega^b_{\cdot a} = \tilde{n}^{(b)}_a(X), \qquad \Omega_b^{\cdot a} = \tilde{n}^a_{(b)}(X). \tag{31. 24}$$

Эти аффиноры содержат, вообще говоря, дополнительный локальный поворот декартовых триад (30. 43); выделяя матрицу этого поворота, аффиноры можно записать в следующей форме:

$$\Omega_a^{\cdot b} = \tilde{\omega}_a^{\cdot c}(X)\, L_c^{\cdot b}(X), \qquad \Omega^a_{\cdot b} = \tilde{\omega}^a_{\cdot c}(X)\, L^c_{\cdot b}(X), \tag{31. 24a}$$

где L — лоренцев аффинор. Явный вид его снова будет определяться выражениями (30. 23)—(30. 24) с тем отличием, что теперь компоненты $\tilde{u}^a$ будут функциями точки.

Преобразующие аффиноры (31. 23), связывающие базисные поля ИСО и НСО

$$n^a_{(\alpha)} = \Omega^a_{\cdot b}\tilde{n}^b_{(\alpha)}, \qquad \tilde{n}^b_{(\alpha)} = \Omega_a^{\cdot b} n^a_{(\alpha)}, \tag{31. 25}$$

в силу определения обладают теми же свойствами, что и векторные поля $\tilde{n}^a_{(\alpha)}$, в частности не являются однозначными функциями точки. Поэтому аффинор $\Omega^a_{\cdot b}(X)$ существенно отличается от аффинора $\omega^a_{\cdot b}(X)$, с помощью которого мы описываем локальные изменения ориентации координатных тетрад, т. е. изменение B-градуировки системы отсчета [1].

Функции $\omega^a_{\cdot b}(X)$ являются однозначными функциями точки, не связаны непосредственно с выбором какой-либо конгруэнции мировых линий, не зависят ни от каких начальных условий, обеспечивая в каждой мировой точке произвольный выбор начала отсчета направлений и относительных скоростей, отображая тем самым принцип относительности направлений и скоростей.

Конечно, можно так подобрать функции $\omega^a_{\cdot b}(X)$, что вдоль отдельной мировой линии векторные поля $\tilde{n}^a_{(\alpha)}(X)$, полученные из однородного поля $n^a_{(\alpha)}$ преобразованием

$$'\tilde{n}^a_{(\alpha)}(X) = \omega^a_{\cdot b}(X)\, n^b_{(\alpha)}, \tag{31. 26}$$

будут совпадать с полями, полученными из (31. 25), и, следовательно, правильно отображать историю движения отдельного базисного тела НСО, но для всей конгруэнции мировых линий

[1] Преобразования группы (B).

этого достигнуть невозможно, именно ввиду однозначности функций $\omega^{a}_{\cdot b}(X)$.

Закон перенесения, т. е. изменения компонент вектора при некотором смещении, соответствующий полям $'\tilde{n}^{a}_{(\alpha)}(X)$, найденным согласно (31. 26), легко получить. Этот закон имеет следующий вид:

$$d'_p \tilde{n}^{a}_{(\alpha)} = -\left\{\omega_b^{\cdot a'} \frac{\partial \omega^{a}_{\cdot a'}}{\partial X^c}\right\} {}'\tilde{n}^{b}_{(\alpha)} dX^c. \qquad (31.27)$$

Сравнивая это с (31. 19), находим соответствующие коэффициенты вращения

$$\tilde{Q}^{a}_{c,\,b\cdot} = \omega_b^{\cdot a'} \frac{\partial \omega^{a}_{\cdot a'}}{\partial X^c}. \qquad (31.28)$$

Тензор неголономности перенесения (31. 7) здесь тождественно обращается в нуль, следовательно, перенесение (31. 27) голономно, результат переноса не зависит от формы пути. На замкнутом пути полное изменение компонент вектора равно нулю [1].

Особенно наглядно проявляется различие голономного и неголономного перенесений при вычислении отклонения [2] двух близких геодезических. Пусть l^{μ} — вектор, модуль которого дает расстояние между геодезическими (является величиной первого порядка малости). Тогда относительное ускорение, как известно, имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 l^{\mu}}{ds^2} = R^{\mu}_{\sigma\tau\lambda\cdot} l^{\sigma} u^{\tau} u^{\lambda}, \qquad (31.29)$$

где u^{τ} — единичный вектор касательной к геодезической, т. е. 4-вектор скорости.

Из (31. 29) видно, что в случае голономного перенесения вида (31. 27) относительное ускорение равно нулю, ибо тензор неголономности перенесения, т. е. тензор кривизны пространства, равен нулю. Поэтому если в начальный момент 4-векторы скорости двух близких пробных частиц были параллельны, то они и далее будут оставаться параллельными так же, как и геодезические (их мировые линии) будут параллельными прямыми. А это значит, что голономная связность любого происхождения, обусловленная или переходом к криволинейной координатной сетке (преобразования группы (A)), или введением поля локальных координатных тетрад (преобразования группы (B)), не содержит в себе информации о силовом поле.

С другой стороны, закон движения пробной частицы в любом силовом поле, согласно (3. 25—3.27), можно записать в виде

$$\frac{du^a}{ds} = Q^{a}_{c,\,\cdot b} u^c u^b = F^{a}_{\cdot b} u^b, \qquad (31.30)$$

---

[1] Эти свойства характерны для связности абсолютного параллелизма (см. раздел 10).

[2] Точнее, ускорения отклонения (или относительного ускорения).

или, умножая на ds, получим выражение

$$du^a = F^{a}_{\cdot b} u^b ds, \qquad (31.31)$$

которое представляет собой не что иное, как закон перенесения вектора скорости пробной частицы вдоль ее мировой линии.

Таким образом, законом движения задается не поле скоростей, а закон их изменения при смещении вдоль мировой линии; он является неголономным, со всеми вытекающими отсюда следствиями.

Локальные координатные тетрады в ИСО и НСО. При описании свойств пространства-времени НСО для достижения ковариантности результатов относительно преобразований группы (B) необходимо иметь помимо инвариантных еще координатные (B-градуировочные) локальные тетрады.

В нашем распоряжении уже имеются однородное поле базисных и связанное с ним поле координатных тетрад, отображающие базис и B-градуировку ИСО (S)

$$\{M, \mathbf{n}_{(\alpha)}\}, \quad \{M, \mathbf{e}_a\}, \quad \alpha, a = 0, 1, 2, 3. \qquad (31.32)$$

Если B-градуировка базиса собственная, то

$$\mathbf{n}_{(a)} = \mathbf{e}_a, \quad \mathbf{n}_{(\alpha)} = n^a_{(\alpha)} \mathbf{e}_a, \quad n^a_{(\alpha)} = \delta^a_\alpha. \qquad (31.33)$$

В этом случае мы приписываем нулевую скорость базису ИСО (S), т. е. рассматриваем ИСО (S) как лабораторную. Далее, мы определили поле инвариантных базисных тетрад

$$\{M, \mathbf{n}'_{(\alpha)}(X)\}, \quad \mathbf{n}'_{(\alpha)}(X) = \tilde{\Omega}^{\cdot(\beta)}_{(\alpha)}(X)\, \mathbf{n}_{(\beta)}, \qquad (31.34)$$

отображающих историю движения базиса НСО (S'), с которым можно связать неоднородное поле координатных тетрад

$$\{M, \mathbf{e}_{a'}(X)\}, \quad \mathbf{e}_{a'}(X) = \tilde{\Omega}^{\cdot a}_{a'}(X)\, \mathbf{e}_a, \qquad (31.35)$$

отображающих локальную, не обязательно собственную B-градуировку базиса НСО (S). Тогда в окрестности каждой точки M будет определена ортогональная неголономная система координат $\bar{x}^{a'}$.

Мы имеем, следовательно,

$$\mathbf{e}_{a'} = \tilde{\Omega}^{\cdot a}_{a'} \mathbf{e}_a, \quad d\bar{x}^{a'} = \tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a} dX^a. \qquad (31.36)$$

Обратные преобразования запишутся

$$\mathbf{e}_a = \tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a} \mathbf{e}_{a'}, \quad dX^a = \tilde{\Omega}^{\cdot a}_{a'} d\bar{x}^{a'}, \qquad (31.36\text{a})$$

где dX^a и $d\bar{x}^{a'}$ — дифференциалы голономных и неголономных галилеевых координат.

Ввиду того что тетрады (31. 34—31. 35), вообще говоря, не совпадают, так как B-градуировка не обязательно собственная, то аффиноры $\tilde{\Omega}^{\cdot(\beta)}_{(\alpha)}$ и $\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{a'}$ могут отличаться на некоторое ортогональное преобразование, связывающее тетрады (31. 34—31. 35).

Все только что проделанные построения происходили в ИСО (S), т. е. относились к ее пространству-времени, свойства которого нам хорошо известны. О свойствах пространства-времени НСО (S') нам пока ничего неизвестно, однако мы можем уже сейчас формально ввести в НСО (S') аналогичные геометрические объекты.

Прежде всего отметим, что поле базисных тетрад (31. 34) до сих пор считалось принадлежащим пространству-времени ИСО (S), так как они описывают историю движения базиса НСО относительно ИСО. Но в то же время, как сам базис, так и базисные тетрады (31. 34) принадлежат, очевидно, и НСО, ибо они определяют основные ее свойства. Таким образом, в НСО (S') мы имеем поле базисных тетрад, совпадающее с тетрадами (31. 34). Несущественное отличие может состоять в том, что в НСО (S') может быть введена некоторая другая координатная сетка x^μ, связанная с X^a обычными преобразованиями группы A. Следовательно, вместо (31. 34) мы тогда получим

$$\{M, \ \mathbf{n}'_{(\alpha)}(x^\mu)\}. \qquad (31.37)$$

Далее, в НСО (S') можно также ввести B-градуировку, определив поле координатных тетрад

$$\{M, \ \mathbf{h}_{a'}(x^\mu)\}. \qquad (31.38)$$

Наконец, здесь же будет существовать поле локальных аффинных реперов (также координатных) подобно полю $\{M, \ \mathbf{e}_a\}$ в ИСО (S)

$$\{M, \ {}^*\mathbf{e}_\mu(x^\sigma)\}, \qquad (31.39)$$

которое обычным образом связано с неизвестными пока коэффициентами Ламэ и метрикой НСО (S')

$${}^*\mathbf{e}_\mu = h^{a'}_\mu \mathbf{h}_{a'}, \qquad g_{\mu\nu} = \eta_{a'b'} h^{a'}_\mu h^{b'}_\nu. \qquad (31.40)$$

С тетрадой (31. 38) связана неголономная галилеева система координат $x^{a'}$, аналогичная системе координат $\bar{x}^{a'}$, введенной в ИСО (S), при этом здесь имеют место соотношения, аналогичные (31. 36—31. 36а)

$$\mathbf{h}_{a'} = h^\mu_{a'} {}^*\mathbf{e}_\mu, \qquad dx^{a'} = h^{a'}_\mu dx^\mu, \qquad (31.41)$$

и обратные преобразования имеют вид

$${}^*\mathbf{e}_\mu = h^{a'}_\mu \mathbf{h}_{a'}, \qquad dx^\mu = h^\mu_{a'} dx^{a'}. \qquad (31.41a)$$

В дальнейшем окажется полезным понятие мгновенно сопутствующей локальной ИСО, которая в каждой точке M мировой линии базисного тела НСО имеет ту же скорость, что и это тело. Локально сопутствующую ИСО мы обозначим через ИСО (S')[1].

Сопутствие, т. е. равенство скоростей поступательного движения (или равенство нулю относительной скорости) двух локальных

---

[1] Чтобы подчеркнуть тот факт, что она сопутствует НСО (S').

систем отсчета не требует, вообще говоря, совпадения их декартовых триад, но мы будем считать их также совпадающими. Тогда базисные тетрады ИСО (S') в точке M мы получим, положив $X^c = X^c_M$ в разложении (31.9), т. е.

$$\{M, \mathbf{n}'_{(\alpha)}(M)\}, \quad \mathbf{n}'_{(\alpha)} = \tilde{n}^a_{(\alpha)}\mathbf{e}_a. \tag{31.42}$$

Представим теперь все введенные геометрические объекты в следующем виде:

Геометрический объект	ИСО (S)	НСО (S')
Базисные инвариантные тетрады	$\{M, \mathbf{n}_{(\alpha)}\}$	$\{M, \mathbf{n}'_{(\alpha)}(x^\sigma)\}$
Собственные B-градуировочные тетрады	$\{M, \mathbf{e}_a\}$	—
Тетрады локальной B-градуировки базиса НСО (S')	$\{M, \mathbf{e}_{a'}(X)\}$	$\{M, \mathbf{h}_{a'}(x^\sigma)\}$
Неголономная галилеева система координат	$\bar{x}^{a'}$	$x^{a'}$
Голономная координатная сетка	X^a	x^μ
Коэффициенты Ламэ, связывающие голономную и неголономную координатные сетки	$\tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a}(X)$	$h^{a'}_{\mu}(x^\sigma)$
Локальные аффинные реперы	$\{M, \mathbf{e}_a\}$	$\{M, {}^*\mathbf{e}_\mu(x^\sigma)\}$
Коэффициенты Ламэ, связывающие локальные аффинные реперы с локальными тетрадами	$\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{a'}(X)$	$h^{\mu}_{a'}(x^\sigma)$
Метрика	η_{ab}; $\eta_{a'b'}$	$g_{\mu\nu}$; $\eta_{a'b'}$

Примечание. Напоминаем, что штрихованные латинские индексы нумеруют компоненты относительно локальных координатных тетрад.

В заключение сделаем следующие замечания. Прежде всего отметим, что кажущееся, на первый взгляд, излишним удвоение тетрад (инвариантные и связанные с ними координатные) в действительности оказывается совершенно необходимым, если мы хотим ввести в многообразие геометрические объекты, ковариантные не только относительно группы преобразований (A), но и (B). Группа (B) действует только в многообразии координатных тетрад, обеспечивая, как мы отмечали, произвольный выбор начала отсчета углов и относительных скоростей.

Далее, не следует думать, что, найдя аффиноры, устанавливающие связь базисов ИСО (S) и НСО (S'), мы уже описали переход от ИСО к НСО. Рассмотренное нами описание НСО давалось все время относительно ИСО. Правда, в самом конце раздела мы ввели геометрические объекты, принадлежащие только НСО (S'), координатные тетрады (31. 38), локальный аффинный репер (31. 39),

а также метрику и коэффициенты Ламэ (31. 40), но сказать о них что-либо сейчас мы не можем. Поэтому нашей задачей является определение этих геометрических объектов и прежде всего — коэффициентов Ламэ.

Как увидим в следующем разделе, не переходя в НСО, ибо мы еще не знаем, как это делается, оказывается можно определить коэффициенты Ламэ и, следовательно, метрику НСО, т. е. решить первую половину нашей задачи — описать геометрические свойства пространства-времени НСО. Вторая половина задачи состоит, очевидно, в отыскании правил перехода от ИСО к НСО.

32. Метрика в НСО

По Эйнштейну, причиной искривления пространства-времени НСО служат локальные лоренцевы сокращения, обусловленные неоднородным полем скоростей базисных тел НСО. Поэтому нашей ближайшей задачей является определение этих сокращений в общем случае.

Для упрощения вычислений сделаем следующее предположение (от которого позже освободимся). Положим, что в точке M координатные (B-градуировочные) тетрады (31. 35, 31. 38) совпадают между собой и с базисной тетрадой сопутствующей ИСО (S'), т. е. с (31. 42). Тогда мы имеем

$$\{M,\ \mathbf{e}_{a'}(M)\} = \{M,\ \mathbf{h}_{a'}(M)\} = \{M,\ \mathbf{n}'_{(\alpha)}(M)\}. \qquad (32.\ 1)$$

Локальные преобразования галилеевых координат (31. 36—31. 36а), которые теперь можно рассматривать как сопровождающие переход от ИСО (S) к локальной сопутствующей ИСО (S'), оставляют квадрат длины интервала инвариантным

$$ds^2 = \eta_{ab}dX^a dX^b = \eta_{a'b'}d\bar{x}^{a'}d\bar{x}^{b'}. \qquad (32.\ 2)$$

В силу ортогональности преобразований (31. 36—31. 36а) метрика также остается инвариантной. Компоненты η_{ab} и $\eta_{a'b'}$ всегда образуют одну и ту же диагональную матрицу

$$\eta_{ab} = \eta_{a'b'} = \mathrm{diag}\,\{+1,\ -1,\ -1,\ -1\}. \qquad (32.\ 2а)$$

Это значит, что метрический смысл дифференциалов координат dX^a и $d\bar{x}^{a'}$, каждого в своей локальной ИСО, остается один и тот же, но численные значения их принадлежат различным масштабам — различным масштабным векторам $\mathbf{e}_a$ и $\mathbf{e}_{a'}$. Так, например, если $\mathbf{e}_1$ в ИСО (S) есть геометрическое место одновременных событий, образующих пространственный вектор, задающий единицу длины в направлении оси X^1, а вектор $\mathbf{e}_{1'}$ в локальной ИСО (S') обладает теми же свойствами, то этот же вектор $\mathbf{e}_{1'}$, отнесенный к ИСО (S), уже не будет единичным. Вследствие относительности одновременности он не будет представлять конфигурации одновременных событий. Поэтому масштабные векторы $\mathbf{e}_a$ и $\mathbf{e}_{a'}$ и им принад-

лежащие дифференциалы dX^a и $dx^{a'}$ непосредственно сравнивать нельзя [1].

Измерять или сравнивать, в силу определения самого процесса сравнения, можно только конфигурации одновременных событий, например отрезки длины, либо конфигурации одноместных событий, т. е. временные отрезки [2].

Для наглядности связь координатных тетрад, принадлежащих различным системам отсчета и задающих собственные масштабы, изобразим в следующем виде:

ИСО (S)	Преобразующий аффинор	Локальная сопутствующая ИСО (S')	НСО (S')	
$\{M, \mathbf{e}_a\}$	$\Omega_{a'}^{\cdot a}(M)$	$\{M, \mathbf{e}_{a'}(M)\} = \{M, \mathbf{h}_{a'}(M)\}$		(32.3)

Так как лоренцевы сокращения и, следовательно, локальные масштабы зависят только от относительных скоростей, то, как показывает схема (32. 3), масштабы в НСО и коэффициенты Ламэ $h_a^{a'}$ мы определим, если сравним по всем правилам этой процедуры масштабы, принадлежащие локальным ИСО (S) и ИСО (S') [3].

Действительно, все локальные ИСО (S), образующие глобальную ИСО (S), находятся в относительном покое, имеют одинаковые ориентации и масштабы, во всей ИСО (S) введена собственная голономная галилеева система координат X^a, поэтому все различия, которые могут возникнуть при сравнении масштабов, будут характеризовать изменение их в НСО (S'), так как поле сопутствующих ей локальных ИСО (S') неоднородно.

Совершенно очевидно, что операция сравнения аналитически не может быть выражена преобразованием Лоренца (31. 36)—(31. 36а), так как оно возвратило бы нас обратно от поля тетрад $\{M, \mathbf{e}_{a'}(M)\}$ к однородному полю $\{M, \mathbf{e}_a\}$ [4].

Мы рассмотрим общий случай сравнения масштабов на примере двух локальных ИСО (S) и ИСО (S').

Локальные преобразования собственных галилеевых систем координат, связанных с координатными тетрадами $\{M, \mathbf{e}_a\}$ и

---

[1] Изменение масштабов при лоренцевых преобразованиях, т. е. при переходе от одной ИСО к другой, в учебниках наглядно показывается с помощью масштабных гипербол. Такого эффекта нет в эвклидовом пространстве, где нет деления векторов на пространственно- и временноподобные и где масштаб является инвариантом.

[2] Измерения всевозможных расстояний и промежутков времени, выполненные наблюдателем, разбивают пространственно-временной континуум на время и физическое трехмерное пространство. При этом разбиение, ввиду относительности одновременности, в каждой локальной ИСО происходит по-своему.

[3] Аналитически описать эту операцию можно, ибо преобразующий аффинор нам известен.

[4] Частный случай операции сравнения движущихся и неподвижных масштабов и показаний часов, приводящий к известным лоренцевым сокращениям, дается в любом учебнике по СТО.

$\{M,\ \mathbf{e}_{a'}(M)\}$, согласно схеме (32. 3) и (31. 36)—(31. 36a), запишутся [1]

$$\bar{x}^{a'} = \Omega^{a'}_{\cdot a} X^a, \qquad X^a = \Omega^{\cdot a}_{a'} \bar{x}^{a'}. \tag{32. 4}$$

Пусть теперь в ИСО (S') в точке с координатами $\bar{x}^{(k')}(k'=1,2,3)$ покоятся часы. Сравним промежуток времени $d\bar{x}^{(0')} = \bar{x}_2^{(0')} - \bar{x}_1^{(0')}$, отсчитанный часами ИСО (S'), с соответствующим промежутком времени $d\tilde{X}^0 = X_2^0 - X_1^0$, отсчитанным по часам ИСО (S).

Второе из равенств (32. 4) после выделения временно́й слагаемой дает

$$\begin{aligned} X_2^0 &= \Omega^{\cdot 0}_{(0')} \bar{x}_2^{(0')} + \Omega^{\cdot 0}_{(k')} \bar{x}^{(k')}, \\ X_1^0 &= \Omega^{\cdot 0}_{(0')} \bar{x}_1^{(0')} + \Omega^{\cdot 0}_{(k')} \bar{x}^{(k')}. \end{aligned} \tag{32. 5}$$

Вычитая из первого равенства второе, находим

$$d\tilde{X}^0 = \Omega^{\cdot (0)}_{(0')} d\bar{x}^{(0')}, \qquad d\bar{x}^{(0')} = \frac{1}{\Omega^{\cdot 0}_{(0')}} d\tilde{X}^0, \tag{32. 6}$$

подставляя значение $\Omega^{\cdot 0}_{(0')} = L^{\cdot 0}_{(0')}$ из (30. 29), получаем известный результат

$$d\bar{x}^{(0')} = \sqrt{1-\beta^2}\, d\tilde{X}^0 \tag{32. 7}$$

— движущиеся часы идут медленнее, причем результат не зависит от направления скорости относительного движения ИСО (S').

Пусть в ИСО (S') покоится масштаб $d\mathbf{l}$ — конфигурация одновременных событий, координаты концов которого будут $\bar{x}_1^{(k')}$, $\bar{x}_2^{(k')}$, $\bar{x}_1^{(0')} = \bar{x}_2^{(0')}$. Проекции этого масштаба по осям координатной тетрады $\{M,\ \mathbf{e}_{a'}(M)\}$ запишутся

$$d\bar{x}^{(k')} = \bar{x}_2^{(k')} - \bar{x}_1^{(k')}, \quad d\bar{x}^{(0')} = 0. \tag{32. 8}$$

Мы хотим выразить проекции движущегося относительно ИСО (S) масштаба $d\mathbf{l}$ через проекции и масштабы, принадлежащие ИСО (S).

Так как процедура сравнения требует, чтобы сравнивались конфигурации одновременных событий, т. е. чтобы отсчеты положения начала и конца движущегося масштаба производились в ИСО (S) одновременно, то измеренные проекции $d\tilde{X}^k$ будут проекциями по осям координатной тетрады $\{M,\ \mathbf{e}_a\}$ того направленного отрезка, который высекается мировыми линиями концов $d\mathbf{l}$ на гиперплоскости одновременности $X^0=\mathrm{const}$. Это будет, очевидно, косоугольная проекция, так как мировые линии концов $d\mathbf{l}$ неортогональны гиперплоскости одновременности ИСО (S).

---

[1] Преобразования (32. 4) локальные, поэтому значения координат X^a и $\bar{x}^{a'}$ следует считать малыми первого порядка; дифференциалы, как в случае (31. 36), ради простоты здесь не пишем. Мы заменили ввиду упрощения (32. 1) $\tilde{\Omega}$ на Ω.

Если координаты точек пересечения будут X_1^k, X_2^k, то проекции этого отрезка будут

$$d\tilde{X}^k = X_2^k - X_1^k, \qquad d\tilde{X}^0 = 0. \tag{32. 9}$$

Воспользовавшись первым из равенств (32. 4) и выделяя временну́ю слагаемую, находим

$$\begin{aligned} \bar{x}_2^{(k')} &= \Omega^{(k')}_{\cdot 0} X^0 + \Omega^{(k')}_{\cdot k} X_2^k, \\ \bar{x}_1^{(k')} &= \Omega^{(k')}_{\cdot 0} X^0 + \Omega^{(k')}_{\cdot k} X_1^k. \end{aligned} \tag{32. 10}$$

Вычитая из первого равенства второе и пользуясь (32. 8) и (32. 9), имеем

$$d\bar{x}^{(k')} = \Omega^{(k')}_{\cdot k} d\tilde{X}^k. \tag{32. 11}$$

Если, в частности, ИСО (S') движется вдоль оси X^1 системы (S) и движущийся масштаб расположен вдоль оси $\bar{x}^{1'}$, то, согласно (30. 28), получаем хорошо известный результат

$$d\bar{x}^{(1')} = \frac{d\tilde{X}^1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{32. 12}$$

Сопоставляя теперь результаты (32. 6) и (32. 11), приходим к решающему для описания НСО заключению, что существует аффинор, назовем его масштабным, $h_a^{a'}$ такой, что

$$d\bar{x}^{a'} = h_a^{a'} d\tilde{X}^a. \tag{32. 13}$$

Он позволяет выразить проекции $d\bar{x}^{a'}$ вектора, отнесенного к ИСО (S'), через новые, уже неортогональные, проекции $d\tilde{X}^a$, полученные в результате сравнения проекций $d\bar{x}^{a'}$ с неподвижными масштабами и часами, расположенными в ИСО (S).

Масштабный аффинор $h_a^{a'}$, как и аффинор $\Omega^{a'}_{\cdot a}$, содержит, согласно (31. 24а), дополнительные локальные повороты декартовых триад, описываемые матрицей (30. 43),

$$\omega^{a}_{\cdot c}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^{(k)}_{\cdot (m)} \end{pmatrix}.$$

Явный вид $h_a^{a'}$ мы получим, воспользовавшись выражениями (32. 6), (32. 11) и (31. 24а),

$$h_a^{a'} = \omega^{a'}_{\cdot c'} \Lambda^{c'}_{\cdot a} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L^{(0')}_{\cdot 0}} & 0 \\ 0 & \omega^{(k')}_{\cdot (m)} L^{(m)}_{\cdot k} \end{pmatrix}, \tag{32. 14}$$

где $\Lambda^{c'}_{\cdot a}$ имеет следующий вид:

$$\Lambda^{c'}_{\cdot a} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L^{(0')}_{\cdot 0}} & 0 \\ 0 & L^{(m)}_{\cdot k} \end{pmatrix}. \tag{32. 14а}$$

Наконец, принимая во внимание выражения (30. 23) (30. 24) [1], найдем

$$\Lambda^{c'}_{\cdot a}=\begin{pmatrix}\Lambda^{(0')}_{\cdot 0} & \Lambda^{(0')}_{\cdot k}\\ \Lambda^{(m')}_{\cdot 0} & \Lambda^{(m')}_{\cdot k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{u_0} & 0\\ 0 & \delta^{m'}_k-\frac{u_k u^{m'}}{1+u_0}\end{pmatrix}. \tag{32. 14б}$$

Вычисляя обычным путем взаимный аффинор, получим

$$\Lambda^{\cdot a}_{c'}=\begin{pmatrix}\Lambda^{\cdot 0}_{(0')} & \Lambda^{\cdot 0}_{(k')}\\ \Lambda^{\cdot k}_{(0')} & \Lambda^{\cdot k}_{(k')}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_0 & 0\\ 0 & \delta^k_{k'}+\frac{u^k u_{k'}}{u_0(1+u_0)}\end{pmatrix}. \tag{32. 15}$$

Локальный лоренцев аффинор в новых обозначениях запишется как

$$L^{a'}_{\cdot a}=\begin{pmatrix}L^{(0')}_{\cdot 0} & L^{(0')}_{\cdot k}\\ L^{(k')}_{\cdot 0} & L^{(k')}_{\cdot k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_0 & u_k\\ -u^{k'} & \delta^{k'}_k-\frac{u_k u^{k'}}{1+u_0}\end{pmatrix}; \tag{32. 16}$$

аффинор обратного преобразования будет иметь следующий вид:

$$L^{\cdot a}_{a'}=\begin{pmatrix}L^{\cdot 0}_{(0')} & L^{\cdot 0}_{(k')}\\ L^{\cdot k}_{(0')} & L^{\cdot k}_{(k')}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_0 & -u_{k'}\\ u^k & \delta^k_{k'}-\frac{u^k u_{k'}}{1+u_0}\end{pmatrix}. \tag{32. 17}$$

При этом имеют место обычные условия ортогональности

$$\eta_{ab}=\eta_{a'b'}L^{a'}_{\cdot a}L^{b'}_{\cdot b};\qquad \eta_{a'b'}=\eta_{ab}L^{\cdot a}_{a'}L^{\cdot b}_{b'}. \tag{32. 18}$$

Итак, если мы имеем 4-вектор некоторого смещения (или какой-либо другой 4-вектор), то его проекции $d\bar{x}^{a'}$ и $dx^{a'}$ относительно локальных тетрад $\{M, \mathbf{e}_{a'}\}$ и $\{M, \mathbf{h}'_a\}$, в силу равенства (32. 1), будут равны

$$d\bar{x}^{a'}=dx^{a'}. \tag{32. 19}$$

Этот же 4-вектор может быть отнесен и к тетраде $\{M, \mathbf{e}_a\}$, принадлежащей ИСО (S), тогда его компоненты dX^a будут связаны с компонентами (32. 19) преобразованиями Лоренца (31. 36) и (31. 36а). А теперь спросим себя, какой смысл имеет выражение (32. 13) или, точнее, к какому реперу относятся проекции $d\tilde{X}^a$ того же самого 4-вектора смещения?

Выше было установлено, что проекции $d\tilde{X}^a$ неортогональны [2] и искажены лоренцевыми сокращениями. Сопоставив, далее,

---

[1] Напоминаем, что индексы k, l, m, n, . . ., взятые в скобки, принадлежат локальной тетраде $\{O, \mathbf{e}_{a'}\}$, индекс без штриха (a) относится к глобальному аффинному реперу (может быть и ортогональным), с которым связана голономная система координат, в частности галилеева. В дальнейшем вместо $\tilde{u}^a$ будем писать u^a (без тильды). Верхний индекс определяет номер строки, нижний — столбца.

[2] Формально это видно из того, что аффинор (32. 14б) не представляет собой матрицы ортогонального преобразования.

равенства (31. 36) и (32. 13), легко видеть, что в последнем случае отсутствует равенство, устанавливающее связь двух реперов.

Это равенство должно, очевидно, связывать тетрады (32. 1) с некоторым аффинным (не ортонормированным) координатным репером $\{M, \ {}^*\mathbf{e}_a\,(X)\}$. Тогда с этим дополнением (32. 13) запишется

$$\mathbf{h}_{a'} = h^a_{a'}\,{}^*\mathbf{e}_a, \qquad dx^{a'} = h^{a'}_a d\widetilde{X}^a. \tag{32. 20}$$

Для обратных преобразований имеем

$$^*\mathbf{e}_a = h^{a'}_a \mathbf{h}_{a'}, \qquad d\widetilde{X}^a = h^a_{a'} dx^{a'}. \tag{32. 20a}$$

Эти равенства показывают, что в пространстве-времени НСО (S') возникает криволинейная координатная сетка $\widetilde{X}^a$, связанная с полем аффинных реперов $\{M, \ {}^*\mathbf{e}_a\,(\widetilde{X})\}$.

Эта сетка, которую будем называть квазигалилеевой, не вносит в компоненты метрического тензора g_{ab} никакой, специфически координатной, информации и без всяких изменений переходит в галилееву X^a, если $u^k=0$, $u^0=1$, т. е. если НСО (S') превращается в ИСО (S). Неоднородное поле координатных аффинных реперов $\{M, \ {}^*\mathbf{e}\,(\widetilde{X})\}$ характеризует метрические свойства пространства-времени НСО (S'), но не ИСО (S), так как именно НСО (S') связана с неоднородным полем скоростей базисных тел, которое обусловило локальные лоренцевы сокращения и, как следствие этого, привело к возникновению поля аффинных реперов.

Отметим, что использование ИСО для установления изменения масштабов не является существенным (хотя и очень удобным). Наблюдатель, находящийся в НСО, точно так же установит относительное изменение своих масштабов, переходя от одного базисного тела к другому, не обращаясь при этом к ИСО, так как базисные тела НСО находятся в относительном движении.

Вычислим теперь квадрат длины вектора смещения (интервал). Согласно (32. 2), (32. 19) и (32. 20), имеем

$$ds^2 = \eta_{ab} dX^a dX^b = \eta_{a'b'} dx^{a'} dx^{b'} = g_{ab} d\widetilde{X}^a d\widetilde{X}^b, \tag{32. 21}$$

где

$$g_{ab} = \eta_{a'b'} h^{a'}_a h^{b'}_b \tag{32.21a}$$

есть искомый метрический тензор пространства-времени НСО, обусловленный лоренцевыми сокращениями, а коэффициенты $h^{a'}_a$ представляют собой не что иное, как соответствующие коэффициенты Ламэ [1].

Воспользовавшись выражениями (32. 14), мы вычислим ковариантные компоненты метрического тензора. Выделяя в (32. 21a) временны́е слагаемые, находим

$$g_{ab} = h^{(0')}_a h^{(0')}_b + \eta_{(k')(m')} h^{(k')}_a h^{(m')}_b;$$

---

[1] Выражение (32. 21a) показывает, что компоненты метрического тензора являются инвариантами группы преобразований (B).

подставляя сюда значения коэффициентов Ламэ из (32. 14), получим

$$g_{00} = (h_0^{(0')})^2 = \frac{1}{u_0^2} = 1 - \beta^2, \qquad g_{k0} = 0. \tag{32. 22}$$

Для пространственных компонент из (32. 21а) и (32. 14) находим

$$g_{km} = \eta_{a'b'} h_k^{a'} h_m^{b'} = \eta_{(k')(m')} \Omega^{(k')}_{\cdot k} \Omega^{(m')}_{\cdot m} = \eta_{(k')(m')} \omega^{(k')}_{\cdot (p')} \omega^{(m')}_{\cdot (q')} L^{(p')}_{\cdot k} L^{(q')}_{\cdot m} =$$
$$= \eta_{(p')(q')} L^{(p')}_{\cdot k} L^{(q')}_{\cdot m} = \eta_{km} - u_k u_m. \tag{32. 23}$$

Из этого результата видно, что метрика НСО не зависит от дополнительного поворота декартовых триад, т. е. не зависит от их относительного расположения, но определяется только локальными скоростями движения базиса относительно ИСО.

Собирая все результаты вместе, запишем метрический тензор в явном виде:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{u_0}\right)^2 & 0 \\ 0 & \eta_{km} - u_k u_m \end{pmatrix}. \tag{32. 24}$$

Точно так же легко получить контравариантные компоненты метрического тензора

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} (u_0)^2 & 0 \\ 0 & \eta^{km} + \frac{u^k u^m}{(u_0)^2} \end{pmatrix}. \tag{32. 25}$$

Непосредственным вычислением легко убедиться в том, что

$$\Lambda = \sqrt{-g} = 1, \qquad g = \mathrm{Det}\,|g_{ab}|. \tag{32. 26}$$

Таким образом, четырехмерный объем является инвариантным не только относительно ортогональных преобразований $\Omega^{a'}_{\cdot a}$, но и относительно масштабных $h_a^{a'}$.

В НСО (S') мы можем от координатной сетки $\tilde{X}^a$ перейти к произвольной x^μ с помощью преобразований группы (A)

$$\tilde{X}^a = \tilde{X}^a(x^\mu), \qquad x^\mu = x^\mu(\tilde{X}^a); \tag{32. 27}$$

тогда геометрические объекты, введенные в НСО, преобразуются следующим образом:

$$\begin{gathered} h_\mu^{a'} = h_a^{a'} \frac{\partial \tilde{X}^a}{\partial x^\mu}, \qquad g_{\mu\nu} = g_{ab} \frac{\partial \tilde{X}^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{X}^b}{\partial x^\nu}, \\ ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu, \qquad \Lambda = \mathrm{Det}\left|\frac{\partial \tilde{X}^a}{\partial x^\mu}\right|. \end{gathered} \tag{32. 28}$$

В НСО основной детерминант может быть отличен от единицы только вследствие перехода к произвольной сетке.

Метрика НСО, как мы видели, определяется только локальными скоростями движения ее базисных тел и не зависит от их

ускорений. Следовательно, в одном и том же силовом поле метрика НСО может быть весьма различной, так как в одном и том же силовом поле можно определить множество различных конгруэнций мировых линий, т. е. множество базисов НСО.

33. Переход от ИСО к НСО

В случае двух ИСО, как мы видели, существует однозначный лоренцев аффинор (30. 23—30. 24), преобразующий поля инвариантных тетрад, отображающих базисы этих ИСО, одно в другое. Это преобразование, влекущее за собой преобразование компонент всех геометрических объектов, отнесенных к исходной ИСО, есть описание перехода от одной ИСО к другой. При этом всевозможные четырехмерные «конструкции», например векторные или тензорные поля, отображающие историю или мгновенное состояние физической системы, конечно, являются инвариантами перехода, так как классическая (не квантовая) физическая система не меняет своего состояния от того, что подвергается наблюдению. Изменяются лишь проекции геометрических объектов на базисные или координатные тетрады, т. е. наблюдаемые в данной системе отсчета численные значения физических величин. Поэтому описание перехода от одной ИСО к другой весьма похоже на преобразование галилеевых систем координат [1].

В случае НСО дело обстоит гораздо сложнее. Поле базисных тетрад НСО — неоднородное; более того, оно является неголономным. Поэтому не существует однозначного аффинора, связывающего базисные тетрады ИСО и НСО [2]; кроме того, локальные лоренцевы сокращения, описываемые коэффициентами Ламэ (32. 14), а также метрикой (32. 24), как и предполагал Эйнштейн, привели к искривленному пространству-времени НСО [3]. Следовательно, переход от ИСО к НСО есть, в сущности, «переход» от плоского пространства-времени к искривленному.

На языке геометрии это означает взаимно однозначное отображение друг на друга двух римановых пространств, одно из которых является плоским [4]. Основной вопрос, возникающий здесь — это вопрос о соответствии геометрических объектов, заданных в отображаемых пространствах.

Такое соответствие, если оно окажется возможным и содержательным как с геометрической, так и с физической точки зрения, и будет описывать переход от ИСО к НСО.

---

[1] Подробно происхождение этой аналогии мы рассмотрели в разделе 30.

[2] Его можно построить только вдоль мировых линий базисных тел, по которым проводилось интегрирование уравнений движения.

[3] Мы не приводим, ввиду громоздкости, общего выражения для тензора кривизны; вместо этого ниже будут рассмотрены частные случаи.

[4] Отметим, что и в случае двух ИСО описание перехода от одной из них к другой также может быть представлено как взаимно однозначное отображение друг на друга двух плоских пространств.

Определение соответствия или отображения должно быть связано с некоторым приемлемым физическим предположением, ибо сама по себе геометрия не может дать однозначного ответа на наш вопрос, но зато может или оправдать, или отвергнуть то, что мы примем, исходя из некоторых других соображений.

Рассмотрим сначала вопрос с чисто геометрической точки зрения. Пусть между точками двух областей Ω_1 и Ω_2, которые представляют собой элементарные многообразия, установлено взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое соответствие [2] [1]. Далее предположим, что в Ω_1 введена некоторая координатная сетка x^μ, тогда в Ω_2 мы можем построить такую же сетку следующим образом. Каждой точке M_2 из Ω_2 приписываем те же координаты x^μ, которые имеет соответствующая ей точка M_1 из Ω_1. После этого можно сказать, что в нашем распоряжении имеются два элементарных многообразия с одинаковыми координатными сетками

$$\Omega_1[x^\mu], \qquad \Omega_2[x^\mu].$$

Допустим, что в каждом многообразии задана метрика $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ соответственно; тогда для интервалов, имеющих компоненты dx^μ, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} &1)\ \Omega_1[x^\mu], \qquad d\overset{\circ}{s}{}^2 = \overset{\circ}{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu; \\ &2)\ \Omega_2[x^\mu], \qquad ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \tag{33. 1}$$

Такое сопоставление двух пространств мы будем называть их соответствием. Частным случаем такого соответствия является конформное соответствие (см. раздел 5). Сейчас нас интересует не столько соответствие метрик (33. 1), сколько соответствие между геометрическими объектами, заданными в разных пространствах. Конкретно вопрос сводится к следующему.

Пусть в точке M_1 области Ω_1 задан тензор $\overset{\circ}{A}{}^\mu$, в соответствующей ей точке M_2 из Ω_2 задан тензор A^μ. Спрашивается, можно ли, исходя только из соответствия (33. 1), установить какую-либо связь между компонентами $\overset{\circ}{A}{}^\mu$ и A^μ? Компоненты тензоров, вообще говоря, имеют аффинный характер, т. е. не связаны непосредственно с метрикой, поэтому о какой-либо связи между $\overset{\circ}{A}{}^\mu$ и A^μ говорить не приходится [2]. В том случае, если эти компоненты связаны с метрикой, например являются компонентами 4-скорости

$$\overset{\circ}{V}{}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\overset{\circ}{s}}, \qquad V^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \tag{33. 2}$$

некоторая связь между ними, конечно, имеется. Но даже при наличии этой связи мы не получим никакого представления о связи

[1] Сейчас не существенно, как это сделано, важно, что такое соответствие установлено.

[2] Если, конечно, мы эту связь не введем «насильно», исходя из каких-либо дополнительных соображений.

геометрических объектов (векторов), так как их компоненты $\mathring{A}^{\mu}$ и A^{μ} принадлежат аффинным реперам, построенным в разных пространствах, и у нас нет пока никакого мотивированного способа установить связь между этими реперами.

Если же не требовать слишком многого, то можно и при этих скудных данных построить некоторое отображение.

Построим для этого в соответствующих точках M_1 и M_2, т. е. в точках, имеющих одинаковые координаты x^{μ}, аффинные реперы

$$\begin{aligned} &1)\ \Omega_1[x^{\mu}], \qquad \{M_1,\ \mathbf{e}_{\mu}(x)\}, \qquad \mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\nu}=\mathring{g}_{\mu\nu};\\ &2)\ \Omega_2[x^{\mu}], \qquad \{M_2,\ {}^*\mathbf{e}_{\mu}(x)\}, \qquad {}^*\mathbf{e}_{\mu}\cdot{}^*\mathbf{e}_{\nu}=g_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{33.3}$$

о которых мы только что говорили. Кроме того, в этих же точках построим инвариантные тетрады

$$\begin{aligned} &1)\ \Omega_1[x^{\mu}], \qquad \{M_1,\ \mathbf{n}'_{(\alpha)}(x)\}, \qquad \mathbf{n}'_{(\alpha)}\cdot\mathbf{n}'_{(\beta)}=\eta_{(\alpha)(\beta)};\\ &2)\ \Omega_2[x^{\mu}], \qquad \{M_2,\ \mathbf{n}''_{(\alpha)}(x)\}, \qquad \mathbf{n}''_{(\alpha)}\cdot\mathbf{n}''_{(\beta)}=\eta_{(\alpha)(\beta)}. \end{aligned} \tag{33.4}$$

Все эти построения выполнены, разумеется, в локальных касательных пространствах. Тогда мы можем (см. раздел 2) тензоры первого ранга $\mathring{A}^{\mu}$ и A^{μ} отобразить в точках M_1 и M_2 на векторы плоских касательных пространств. После этого можно записать следующие равенства:

$$\begin{aligned} &1)\ \Omega_1[x^{\mu}], \qquad \mathring{\mathbf{A}}=\mathring{A}^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}=\mathring{A}^{(\alpha)}\mathbf{n}'_{(\alpha)};\\ &2)\ \Omega_2[x^{\mu}], \qquad \mathbf{A}=A^{\mu}{}^*\mathbf{e}_{\mu}=A^{(\alpha)}\mathbf{n}''_{(\alpha)}. \end{aligned} \tag{33.5}$$

Теперь для получения отображения мы должны сделать определенное предположение о связи компонент отображаемых объектов, ибо как раз в этом вопросе геометрия нам ничем помочь не может. Лучше всего это сделать относительно компонент $\mathring{A}^{(\alpha)}$ и $A^{(\alpha)}$, являющихся скалярами, так как они принадлежат инвариантным тетрадам. Последние, хотя и принадлежат разным пространствам, но имеют одинаковую (стандартную) конструкцию.

Простейшим предположением будет следующее:

$$A^{(\alpha)}=M^{(\alpha)}_{\cdot(\beta)}\mathring{A}^{(\beta)}, \qquad \mathring{A}^{(\beta)}=M^{\cdot(\beta)}_{(\alpha)}A^{(\alpha)}, \tag{33.6}$$

т. е. мы предполагаем, что скаляры $A^{(\alpha)}$ и $\mathring{A}^{(\alpha)}$ связаны линейным однородным соотношением, где $M^{(\beta)}_{\cdot(\alpha)}$ — локальная скалярная матрица, которую удобно (но необязательно) подчинить следующим условиям:

$$\eta_{(\alpha)(\beta)}M^{\cdot(\alpha)}_{\gamma}M^{\cdot(\beta)}_{(\varepsilon)}=\eta_{(\alpha)(\beta)}M^{(\alpha)}_{\cdot(\gamma)}M^{(\beta)}_{\cdot(\varepsilon)}=\eta_{(\gamma)(\varepsilon)}. \tag{33.7}$$

В частности, если матрица $M^{(\alpha)}_{\cdot(\beta)}$ будет единичной, то (33.6) превращается в равенство скалярных компонент

$$A^{(\alpha)}=\mathring{A}^{(\alpha)}. \tag{33.8}$$

Тогда если условия (33. 6) или (33. 8) имеют место, то, по определению, будем считать, что вектор $\mathbf{A}$ есть отображение вектора $\mathring{\mathbf{A}}$, и, наоборот, $\mathring{\mathbf{A}}$ — отображение $\mathbf{A}$.

Определенное таким путем отображение, как это видно из построения, инвариантно относительно обеих групп преобразований — (A) и (B). В то же время оно будет зависеть как от выбора полей инвариантных тетрад (33. 4), так и от выбора матрицы $M^{(\alpha)}_{\cdot(\beta)}$.

Используя равенства (33. 4)—(33. 7), легко показать, что квадрат модуля вектора является инвариантом отображения

$$|\mathring{\mathbf{A}}|^2 = |\mathbf{A}|^2.$$

Следовательно, изотропный вектор отображается изотропным.

С другой стороны, из (33. 1) следует, что криволинейные компоненты смещения dx^μ сами являются инвариантами соответствия, но тогда квадрат смещения может таковым и не быть.

Можно получить еще целый ряд любопытных следствий, но мы займемся ими позже, а сейчас продолжим рассмотрение принятого отображения и постараемся его уточнить, насколько это возможно, исходя из физических соображений.

Для того чтобы принятое соответствие (33. 1) и (33. 6)—(33. 8) можно было использовать для описания перехода от ИСО к НСО, необходимо ликвидировать три пробела, оставшихся в определении соответствия.

1. Необходимо конкретизировать и установить возможный физический смысл соответствия точек M_1 и M_2, принадлежащих разным областям Ω_1 и Ω_2.

2. Исходя из физических соображений (аксиомы геометрии здесь ничего не дают), попытаться установить связь между реперами, принадлежащими областям Ω_1 и Ω_2.

3. Попытаться или оправдать, или уточнить условия (33. 6)—(33. 8).

Начнем с сопоставления рассмотренной геометрической картины соответствия с тем, что мы уже знаем относительно ИСО и НСО.

Поставим предварительно следующий вопрос: в каком виде предстанут перед нами пространство-время и всевозможные физические объекты, если отвлечься от их метрических свойств?

Очевидно, в нашем распоряжении тогда останутся физические объекты, представленные своими аффинными свойствами. Останутся, например, занумерованные определенным образом точечные события, т. е. пространственно-временные совпадения; останутся их последовательности, или различные конгруэнции мировых линий; останутся некоторые поля, например поля касательных к конгруэнциям векторов и т. д. Сама интересующая нас область физического пространства-времени превратится в некоторое «физическое многообразие», которому в геометрии можно сопоставить область Ω элементарного многообразия с координат-

ной сеткой x^μ, отображающей нумерацию точечных событий (мировых точек).

В этом и только в этом «физическом многообразии», ибо другого нам не дано, движутся базисы всех систем отсчета, действительных или воображаемых, которые только могут быть определены. Геометрически это означает, что в одной и той же отображающей области Ω элементарного многообразия может быть определено сколько угодно различных метрик.

Тогда в сопоставлении (33. 1) нам нет надобности рассматривать две различные области Ω_1 и Ω_2 — это есть, в сущности, одна и та же область Ω, в которой введены две метрики: $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$, описывающая ИСО ($S$), соответствующая плоскому пространству-времени, и $g_{\mu\nu}$, описывающая НСО (S'). Тем самым конкретизируется соответствие точек M_1 и M_2 — они просто оказываются совпадающими и отображаются мировой точкой M области Ω. Следовательно, мы имеем

$$\Omega_1 [x^\mu] = \Omega_2 [x^\mu] = \Omega [x^\mu], \qquad M_1 = M_2 = M. \tag{33. 9}$$

Таким образом, устраняется первая из отмеченных выше неясностей.

Перейдем к рассмотрению второй неясности в определении соответствия. Нам следует попытаться установить связь между тетрадами (33. 4), принадлежащими различным пространствам с метриками $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ соответственно, заданными в одном и том же многообразии.

Для первой ориентации в этом вопросе обратим внимание на следующее обстоятельство. Совершенно очевидно, что базисные тела НСО (S') принадлежат пространству-времени ИСО (S), так как их движение описывается относительно ИСО (S), но точно так же они принадлежат и пространству-времени НСО (S'), ибо они являются ее базисом и характером своего движения определяют ее метрику.

Но тогда соответствующая базису конгруэнция мировых линий в своей аффинной части будет тоже общей как для ИСО, так и для НСО. Точно так же и инвариантные тетрады, построенные вдоль этих мировых линий, отображающие историю движения базисных тел, будут общими как для ИСО, так и для НСО [1]. Это значит, что в соответствии (33. 4) совпадают не только области Ω_1 и Ω_2 и соответствующие точки M_1 и M_2, но также совпадают и инвариантные тетрады, построенные в этих точках, т. е.

$$\{M_1,\ n'_{(\alpha)}(x)\} = \{M_2,\ n''_{(\alpha)}(x)\}. \tag{33. 10}$$

Касательные пространства, в которых построены тетрады (33. 10), очевидно, совпадают, так как касательное аффинное пространство (слой) не зависит от того, какая метрика введена

[1] Этот факт был нами использован уже в (31. 37).

в базовом пространстве. Иначе говоря, пространства-времени ИСО (S) и НСО (S') касаются вдоль каждой мировой линии базисного тела, т. е. в мировой трубке бесконечно малого радиуса, описанной вокруг любой мировой линии конгруэнции, оба пространства как бы сливаются (с точностью до бесконечно малых первого порядка).

Мы видим, что все локальные реперы, как ортогональные (33. 4), так и аффинные (33. 3), оказываются построенными в одном и том же локальном касательном пространстве-времени, поэтому между ними можно установить обычные связи.

Однако, прежде чем перейти к рассмотрению этих связей, рассмотрим еще раз соответствие (33. 1). Легко видеть, что в координатах X^a оно запишется так:

$$\begin{aligned} &1)\ \Omega\,[X^a], \quad d\mathring{s}^2 = \eta_{ab} dX^a dX^b, \\ &2)\ \Omega\,[X^a], \quad ds^2 = g_{ab} dX^a dX^b. \end{aligned} \tag{33. 11}$$

В первом пространстве сетка X^a есть галилеева, во втором — она уже криволинейная и неортогональная.

Иногда бывает удобно в НСО (S') перейти к криволинейной сетке x^μ, тогда мы получим

$$\begin{aligned} &dx^\mu = A^\mu_a dX^a, \qquad dX^a = A^a_\mu dx^\mu, \\ &A^\mu_a = \partial x^\mu / \partial X^a, \qquad A^a_\mu = \partial X^a / \partial x^\mu. \end{aligned} \tag{33. 12}$$

Соответствие (33. 11) при этом запишется:

$$\begin{aligned} &1)\ \Omega\,[X^a], \quad d\mathring{s}^2 = \eta_{ab} dX^a dX^b, \\ &2)\ \Omega\,[x^\mu], \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \tag{33. 13}$$

где $g_{\mu\nu}$ и g_{ab} связаны обычным соотношением.

А теперь перейдем к рассмотрению связей между реперами, принадлежащими ИСО (S) и НСО (S').

В пространстве-времени ИСО (S) мы имеем:

1. Однородное поле инвариантных $\{M,\ \mathbf{n}_{(\alpha)}\}$ и совпадающее с ним поле координатных $\{M,\ \mathbf{e}_a\}$ тетрад, отображающих базис и собственную B-градуировку ИСО (S).

2. Неоднородное поле инвариантных тетрад $\{M,\ \mathbf{n}'_{(\alpha)}\}$, отображающее историю движения базиса НСО (S') относительно ИСО (S).

3. Неоднородное поле координатных тетрад $\{M,\ \mathbf{e}_{a'}\}$, отображающее локальную B-градуировку базиса НСО (S').

Между векторами этих тетрад имеются следующие связи:

$$\begin{aligned} &\mathbf{n}_{(a)} = \mathbf{e}_a, \qquad \mathbf{n}'_{(\alpha)} = \Omega^{\cdot(\beta)}_{(\alpha)} \mathbf{n}_{(\beta)}, \qquad \mathbf{e}_{a'} = \tilde{\Omega}^{\cdot a}_{a'} \mathbf{e}_a, \\ &\mathbf{e}_a = \tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a} \mathbf{e}_{a'}, \qquad \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \eta_{ab}, \qquad \mathbf{e}_{a'} \cdot \mathbf{e}_{b'} = \eta_{a'b'}. \end{aligned} \tag{33. 14}$$

В пространстве-времени НСО (S') мы имеем:

1. Неоднородное поле инвариантных тетрад $\{M, \mathbf{n}'_{(\alpha)}\}$, отображающее историю движения базиса[1].

2. Неоднородное поле координатных тетрад $\{M, \mathbf{h}_{a'}\}$, отображающее локальную B-градуировку базиса.

3. Неоднородное поле координатных аффинных реперов $\{M, {}^*\mathbf{e}_\mu\}$, связанных с голономной сеткой x^μ.

Здесь тетрадные векторы связаны следующим образом:

$$ {}^*\mathbf{e}_\mu = h^{a'}_{\mu}\mathbf{h}_{a'}, \qquad \mathbf{h}_{a'} = h^{\mu}_{a'}{}^*\mathbf{e}_\mu; \tag{33.15} $$

при этом, как обычно:

$$ \mathbf{h}_{a'} \cdot \mathbf{h}_{b'} = \eta_{a'b'}, \qquad {}^*\mathbf{e}_\mu \cdot {}^*\mathbf{e}_\nu = \eta_{a'b'} h^{a'}_{\mu} h^{b'}_{\nu} = g_{\mu\nu}, \tag{33.16} $$

где

$$ {}^*\mathbf{e}_\mu = A^{a}_{\mu}{}^*\mathbf{e}_a, \qquad h^{a'}_{\mu} = A^{a}_{\mu} h^{a'}_{a}, \qquad h^{\mu}_{a'} = A^{\mu}_{a} h^{a}_{a'}. \tag{33.17} $$

Так как все перечисленные выше построения выполнены, как мы установили, в одном и том же касательном пространстве и в одной точке M (точке касания), то воспользовавшись уже известными связями, мы легко найдем основной для дальнейшего отображающий аффинор, связывающий координатные реперы $\{M, \mathbf{e}_a\}$ и $\{M, {}^*\mathbf{e}_\mu\}$, принадлежащие ИСО и НСО соответственно.

Заметим, что координатные тетрады $\{M, \mathbf{e}_{a'}\}$ и $\{M, \mathbf{h}_{a'}\}$, отображающие первая в ИСО, а вторая в НСО локальные B-градуировки базиса НСО, вообще говоря, не совпадают, но тогда они должны быть связаны некоторым аффинором (локальным лоренцевым аффинором)

$$ \mathbf{e}_{a'} = \tilde{\omega}^{\cdot b'}_{a'}\mathbf{h}_{b'}. \tag{33.18} $$

Учитывая это, а также связи (33. 14) и (33. 15), мы легко получим следующую цепочку равенств:

$$ \mathbf{e}_a = \tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a}\mathbf{e}_{a'} = \tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a}\tilde{\omega}^{\cdot b'}_{a'}\mathbf{h}_{b'} = \tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a}\tilde{\omega}^{\cdot b'}_{a'} h^{\sigma}_{b'}{}^*\mathbf{e}_\sigma. \tag{33.19} $$

Умножая скалярно на векторы ${}^*\mathbf{e}^\mu$ взаимного репера, получим искомый аффинор

$$ \Theta^{\mu}_{\cdot a} = {}^*\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}_a = h^{\mu}_{b'}\tilde{\omega}^{\cdot b'}_{a'}\tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a}. \tag{33.20} $$

Мы получим некоторое упрощение, если положим

$$ \tilde{\omega}^{\cdot b'}_{a'} = \delta^{b'}_{a'}, \quad \mathbf{e}_{a'} = \mathbf{h}_{a'}, \tag{33.21} $$

т. е. потребуем совпадения (не нарушающего общности) координатных тетрад

$$ \{M, \mathbf{e}_{a'}\} = \{M, \mathbf{h}_{a'}\}. \tag{33.21a} $$

Тогда аффинор (33. 20) и ему обратный примут следующий вид:

$$ \Theta^{\mu}_{\cdot a} = h^{\mu}_{a'}\tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a}, \quad \Theta^{\cdot a}_{\mu} = h^{a'}_{\mu}\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{a'}. \tag{33.22} $$

---

[1] Оно совпадает, как мы отмечали, с аналогичным полем, построенным в пространстве-времени ИСО (S).

Наконец, преобразования аффинных реперов можно представить в виде

$$
{}^*\mathbf{e}_\mu = \Theta_\mu^{\cdot a}\mathbf{e}_a, \qquad \mathbf{e}_a = \Theta^\mu_{\cdot a}{}^*\mathbf{e}_\mu. \tag{33. 23}
$$

При этом мы имеем

$$
\Theta_\mu^{\cdot b} = A_\mu^a \Theta_a^{\cdot b}, \qquad \Theta^\mu_{\cdot b} = A_a^\mu \Theta^a_{\cdot b}, \tag{33. 24}
$$

где

$$
\Theta_a^{\cdot b} = h_a^{a'}\Omega_{a'}^{\cdot b}, \qquad \Theta^a_{\cdot b} = h^a_{a'}\Omega^{a'}_{\cdot b} \tag{33. 24a}
$$

— те же аффиноры (33. 22), но отнесенные к общей координатной сетке X^a.

Первый индекс аффинора (ко- или контравариантный) принадлежит НСО (S'), а второй — ИСО (S). Как легко проверить, аффиноры (33. 22) обладают следующими свойствами:

$$
\begin{aligned}
&\Theta_\mu^{\cdot a}\Theta^\nu_{\cdot a} = \delta^\nu_\mu, && \Theta_\sigma^{\cdot a}\Theta^\sigma_{\cdot b} = \delta^a_b, \\
&g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\Theta_\mu^{\cdot a}\Theta_\nu^{\cdot b}, && \eta_{ab} = g_{\mu\nu}\Theta^\mu_{\cdot a}\Theta^\nu_{\cdot b}.
\end{aligned} \tag{33. 25}
$$

Воспользовавшись выражениями (32. 14—32. 17) и собственной B-градуировкой, когда тетрады $\{M, \mathbf{e}_{a'}\}$, $\{M, \mathbf{h}_{a'}\}$ и $\{M, \mathbf{n}'_{(\alpha)}\}$ совпадают, можно получить их явный вид:

$$
\begin{aligned}
\Theta^a_{\cdot b} &= \begin{pmatrix} \Theta^0_{\cdot 0} & \Theta^0_{\cdot k} \\ \Theta^m_{\cdot 0} & \Theta^m_{\cdot k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0^2 & u_0 u_k \\ -\dfrac{u^m}{u_0} & \delta^m_k \end{pmatrix}, \\
\Theta_a^{\cdot b} &= \begin{pmatrix} \Theta_0^{\cdot 0} & \Theta_m^{\cdot 0} \\ \Theta_0^{\cdot k} & \Theta_m^{\cdot k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -u_0 u_m \\ \dfrac{u^k}{u_0} & \delta^k_m - u^k u_m \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{33. 26}
$$

Аффиноры (33. 22) и (3. 24a) представляют собой смешанные общековариантные тензоры, индексы которых принадлежат различным пространствам — плоскому (ИСО) и искривленному (НСО) — и, следовательно, подчиняются различным законам параллельного переноса. Далее, компоненты аффиноров есть функции класса C^1, так как таковыми являются компоненты инвариантной тетрады $\tilde{n}^a_{(\alpha)}(X)$, входящей в определение $\tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a}$ и, следовательно, в $\Theta^\mu_{\cdot a}$ и $\Theta_\mu^{\cdot a}$, согласно (33. 22). При этом производные от компонент $\tilde{n}^a_{(\alpha)}$ задаются законом переноса (31. 3) инвариантных тетрад, который можно представить, например, в такой форме:

$$
\delta\tilde{n}^a_{(\alpha)} = Q_{c,}{}^a_{b\cdot}\tilde{n}^b_{(\alpha)}dX^c. \tag{33. 27}
$$

Поэтому, если в исследованиях мы ограничиваемся только первыми производными, то поля $\tilde{n}^a_{(\alpha)}(X)$ и, следовательно, аффиноры (33. 22) можно считать дифференцируемыми. Производные второго порядка и выше, как мы видели, вычислить невозможно, вследствие неголономности закона перенесения (33. 27).

Отметим еще следующее. Несмотря на то, что сделано упрощающее предположение (33. 21), аффиноры (33. 22) все еще содержат произвольное лоренцево преобразование, входящее в $\tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a}$ и

$\tilde{\Omega}_{a'}^{\cdot a}$. Это связано с тем, что тетрады (31. 34) и (31. 35) не совпадают, ибо B-градуировка базиса НСО (S'), введенная в пространстве-времени ИСО (S), в общем случае несобственная. Поэтому

$$\tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a} = \omega^{a'}_{\cdot b'} \Omega^{b'}_{\cdot a}, \qquad \tilde{\Omega}_{a'}^{\cdot a} = \omega_{a'}^{\cdot b'} \Omega_{b'}^{\cdot a}, \tag{33. 28}$$

где $\omega^{a'}_{\cdot b'}$ — аффинор B-градуировочного преобразования и $\Omega^{b'}_{\cdot a}$ отличается от $\Omega^{(\alpha)}_{\cdot(\beta)}$ только обозначением индексов.

Итак, мы приходим к следующим результатам. Вдоль мировых линий:

1) инвариантные тетрады (33. 4) оказываются совпадающими, отображая тот факт, что базисные тела НСО (физические реперы) принадлежат как НСО, так и ИСО;

2) аффинные (координатные) реперы $\{M, \mathbf{e}_a\}$ и $\{M, {}^*\mathbf{e}_\mu\}$, принадлежащие ИСО и НСО соответственно, оказываются связанными аффинором (33. 23).

Эти результаты и решают вторую из отмеченных трудностей в определении отображения.

Перейдем теперь к рассмотрению третьей трудности в описании отображения. Нам следует или оправдать или уточнить условия (33. 6)—(33. 8).

Следует сразу отметить, что здесь вряд ли можно найти универсальное правило, пригодное во всех случаях. Отображаемый геометрический объект может либо быть инвариантом соответствия, либо нет, это зависит от его строения — от характера зависимости его от метрики. Может оказаться так, что сами компоненты геометрического объекта являются инвариантами соответствия (как в случае вектора смещения dx^μ), а сам объект таковым может и не являться. Поэтому описание физической системы, связанное с переходом от ИСО к НСО, всякий раз требует специального анализа ситуации, в результате которого мы должны выяснить поведение геометрических и, следовательно, физических объектов по отношению к соответствию (отображению).

Пусть вектор $\mathbf{A}$, характеризующий некоторое свойство физической системы, является инвариантом соответствия. Тогда, согласно (33. 23), имеем

$$\mathbf{A} = A^{\mu *}\mathbf{e}_\mu = A^a \mathbf{e}_a = \Theta^{\mu}_{\cdot a} A^{a *}\mathbf{e}_\mu .$$

Отсюда

$$A^\mu = \Theta^{\mu}_{\cdot a} A^a, \qquad A^a = \Theta_{\mu}^{\cdot a} A^\mu, \tag{33. 29}$$

т. е. переход ИСО—НСО сопровождается локальным аффинным преобразованием компонент инвариантного вектора (или векторного поля). Переходя к ортогональным компонентам в НСО и ИСО, имеем

$$A^{a'} = h_{\mu}^{a'} A^\mu, \qquad \bar{A}^{a'} = \tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a} A^a. \tag{33. 30}$$

Тогда из (33. 29), (33.30) и (33. 20) находим

$$A^{a'} = \tilde{\omega}_{c'}^{\cdot a'} \bar{A}^{c'}, \qquad \bar{A}^{c'} = \tilde{\omega}^{c'}_{\cdot a'} A^{a'}, \tag{33. 31}$$

а это в точности соответствует условиям (33. 6).

Если же мы примем упрощение (33. 21), то

$$A^{a'} = \bar{A}^{a'}, \tag{33. 32}$$

что соответствует условию (33. 8).

Таким образом, условия (33. 31), (33. 32) и, следовательно, (33. 6)—(33. 8) имеют место, если геометрический объект — инвариант соответствия.

34. Частные случаи отображения

Мы рассмотрим сейчас отображение скорости и ускорения при переходе от ИСО к НСО.

Отображение 4-вектора скорости. Пусть локальные координатные тетрады совпадают, т. е. имеет место равенство (33. 21а). Учитывая далее равенство (32. 19) и инвариантность интервала ds, которая видна из (32. 21), мы получим

$$\overset{\circ}{V}{}^{a'} = V^{a'}, \qquad \frac{d\bar{x}^{a'}}{ds} = \overset{\circ}{V}{}^{a'}, \qquad \frac{dx^{a'}}{ds} = V^{a'}, \tag{34. 1}$$

т. е. 4-вектор скорости, согласно (33. 32), есть инвариант соответствия. Тогда из (33. 29) окончательно находим

$$V^{\mu} = \Theta^{\mu}_{\cdot a}\overset{\circ}{V}{}^{a}, \quad \overset{\circ}{V}{}^{a} = \Theta^{\cdot a}_{\mu}V^{\mu}. \tag{34. 2}$$

Если в ИСО (S) имеет место равенство

$$\eta_{ab}\overset{\circ}{V}{}^{a}\overset{\circ}{V}{}^{b} = 1, \tag{34. 3}$$

то и для НСО (S') мы также получим

$$g_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} = 1. \tag{34. 4}$$

В качестве некоторой проверки преобразований (34. 2) рассмотрим случай, когда $\overset{\circ}{V}{}^{a} = u^{a}$, т. е. найдем отображение скоростей базиса НСО. Здесь задача состоит в следующем. Относительно ИСО поле u^a нам известно, требуется найти компоненты этого поля относительно самой НСО. Предположим для простоты, что все B-градуировки собственные, т. е. в любой мировой точке M совпадают следующие тетрады:

$$\{M, \mathbf{e}_{a'}\} = \{M, \mathbf{h}_{a'}\} = \{M, \mathbf{n}'_{(a')}\}. \tag{34. 5}$$

Это значит, что аффинор $\omega^{a'}_{\cdot b'}$ B-градуировочного преобразования превращается в единичный, и, согласно (33. 28), мы получаем

$$\omega^{a'}_{\cdot b'} = \delta^{a'}_{b'}, \qquad \tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a} = \Omega^{a'}_{\cdot a}. \tag{34. 6}$$

Мы можем искомый результат получить сразу, воспользовавшись аффинором (33. 26), но в методическом отношении полезно более подробно разобрать, как работает этот аффинор.

Согласно (34. 2), (33. 24а) и (34. 6), имеем

$$V^a = \Theta^a_{\cdot b} u^b = h^a_{a'} \Omega^{a'}_{\cdot b} u^b = h^a_{a'} u^{a'}, \qquad u^{a'} = \Omega^{a'}_{\cdot a} u^a, \tag{34. 7}$$

где $u^{a'}$ — ортогональные компоненты скорости базиса НСО, отнесенные к самому базису, точнее к локальной сопутствующей ИСО (S'). Полагая $\Omega^{a'}_{\cdot b} = L^{a'}_{\cdot b}$ (дополнительное вращение декартовых триад отсутствует) и воспользовавшись (32. 16), находим

$$u^{a'} = L^{a'}_{\cdot b} u^b = \{1,\ 0,\ 0,\ 0\}, \tag{34. 8}$$

т. е. получили очевидный результат для сопутствующей ИСО (S').

Далее находим криволинейные (квазигалилеевы) компоненты скорости

$$V^a = h^a_{a'} u^{a'} = h^a_{0'} u^{0'} = h^a_{0'} = \{u^0,\ 0,\ 0,\ 0\}. \tag{34. 9}$$

При этом мы воспользовались выражением (32. 15) для $h^a_{a'} = \Lambda^{\cdot a}_{a'}$ (при отсутствии дополнительного вращения декартовых триад).

Итак, мы окончательно имеем

$$V^a = \Theta^a_{\cdot b} u^b = \{u^0,\ 0,\ 0,\ 0\}. \tag{34. 10}$$

Здесь, так же как и в случае (34. 8), пространственные компоненты равны нулю; однако временна́я компонента не равна единице, ибо глобальная метрика НСО негалилеева.

Легко проверить, что равенство

$$g_{ab} V^a V^b = 1 \tag{34. 11}$$

также выполняется.

Отображение ускорения. Ускорение движущейся частицы относительно ИСО (S), в которой введена галилеева система координат X^a, запишется

$$\overset{\circ}{W}{}^a = \frac{d\overset{\circ}{V}{}^a}{ds}, \qquad \overset{\circ}{V}{}^a = \frac{dX^a}{ds}.$$

Нам требуется определить ускорение этой же частицы относительно НСО (S'). Пусть в НСО (S') введена произвольная координатная сетка x^μ и несобственная B-градуировка с совпадающими координатными тетрадами (33. 21а). Тогда, воспользовавшись (34. 2), находим

$$\overset{\circ}{W}{}^a = \frac{d}{ds}(\Theta^{\cdot a}_{\tau} V^\tau) = V^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\Theta^{\cdot a}_{\tau} V^\tau), \qquad V^\sigma = \frac{dx^\sigma}{ds}. \tag{34. 12}$$

При этом мы учли, что вектор смещения (интервал), согласно (32. 19)—(32. 21), есть инвариант соответствия.

Умножая (34. 12) на $\Theta^\mu_{\cdot a}$, находим

$$\overset{\circ}{W}{}^a \Theta^\mu_{\cdot a} = \Theta^\mu_{\cdot a} V^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\Theta^{\cdot a}_{\tau} V^\tau). \tag{34. 13}$$

Выполняя дифференцирование и пользуясь свойствами аффинора (33. 25), найдем

$$\Theta^{\mu}_{\cdot a}\overset{\circ}{W}{}^{a}=\frac{dV^{\mu}}{ds}+\left(\Theta^{\mu}_{\cdot a}\frac{\partial\Theta^{\cdot a}_{\tau}}{\partial x^{\sigma}}\right)V^{\tau}V^{\sigma}. \tag{34. 14}$$

Вычислим теперь выражение в скобках, входящее в (34. 14). Согласно (33. 22), имеем

$$\Theta^{\mu}_{\cdot a}\partial_{\sigma}\Theta^{\cdot a}_{\tau}=h^{\mu}_{a'}\partial_{\sigma}h^{a'}_{\tau}+h^{\mu}_{a'}h^{b'}_{\tau}\tilde{\Omega}^{a'}_{\cdot a}\partial_{\sigma}\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{b'}. \tag{34. 15}$$

Вычислим теперь частную производную от $\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{b'}$. Согласно (8. 10), ковариантная относительно группы (B) производная запишется [1]

$$\tilde{\nabla}_{\sigma}\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{b'}=\partial_{\sigma}\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{b'}-\tilde{\gamma}^{c'}_{\sigma,b'\cdot}\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{c'}$$

или

$$\partial_{\sigma}\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{b'}=\tilde{\nabla}_{\sigma}\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{b'}+\tilde{\gamma}^{c'}_{\sigma,b'\cdot}\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{c'}; \tag{34. 16}$$

далее, согласно (33. 28), имеем

$$\tilde{\nabla}_{\sigma}\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{b'}=\tilde{\nabla}_{\sigma}\omega^{\cdot c'}_{b'}\Omega^{\cdot a}_{c'}=\omega^{\cdot c'}_{b'}\tilde{\nabla}_{\sigma}\Omega^{\cdot a}_{c'}. \tag{34. 17}$$

Мы вынесли здесь $\omega^{\cdot c'}_{b'}$ за знак ковариантной производной, так как последняя общековариантна относительно преобразований группы (B). Ввиду того, что в ИСО (S) введена собственная B-градуировка, то, согласно (31. 24), можем записать

$$\Omega^{\cdot a}_{c'}=\tilde{n}^{a}_{(c')},\quad \Omega^{d'}_{\cdot a}=\tilde{n}^{(d')}_{a}; \tag{34. 18}$$

тогда (34. 17) можно представить в виде:

$$\tilde{\nabla}_{\sigma}\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{b'}=\omega^{\cdot c'}_{b'}\tilde{\nabla}_{\sigma}\tilde{n}^{a}_{(c')}=\omega^{\cdot c'}_{b'}Q^{(d')}_{\sigma,(c')\cdot}\tilde{n}^{a}_{(d')}. \tag{34. 19}$$

Последний результат получен на основании (12. 7) в локальных ортогональных индексах. После этого (34. 16) принимает следующий вид:

$$\partial_{\sigma}\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{b'}=\tilde{\gamma}^{c'}_{\sigma,b'\cdot}\tilde{\Omega}^{\cdot a}_{c'}+\omega^{\cdot c'}_{b'}Q^{(d')}_{\sigma,(c')\cdot}\tilde{n}^{a}_{(d')}. \tag{34. 20}$$

Подставляя это в (34. 15), после несложных преобразований получим

$$\Theta^{\mu}_{\cdot a}\partial_{\sigma}\Theta^{\cdot a}_{\tau}=\Gamma^{\mu}_{\sigma\tau}+Q^{\mu}_{\sigma\tau\cdot}, \tag{34. 21}$$

где $\Gamma^{\mu}_{\sigma\tau}$ — символы Кристоффеля, соответствующие метрике НСО (S'), и

$$Q^{\mu}_{\sigma,\tau\cdot}=h^{\mu}_{a'}h^{b'}_{\tau}\omega^{a'}_{\cdot d'}\omega^{\cdot d'}_{b'}Q^{(d')}_{\sigma,(c')\cdot}. \tag{34. 22}$$

Отметим, что соотношение (34. 21) есть инвариант (скаляр) относительно группы преобразований (B) или, кратко, B-инвариант. Действительно, мы знаем, что компоненты $g_{\mu\nu}$ и символы Кристоффеля являются B-инвариантами. Инвариантность выражения

---

[1] Латинские нештрихованные индексы как галилеевы не дают вклада.

(34. 22) нетрудно установить, если перейти к собственным координатным тетрадам[1]

$$\overset{\circ}{h}{}^{\mu}_{d'} = h^{\mu}_{a'}\omega^{a'}_{\cdot d'}, \qquad \overset{\circ}{h}{}^{c'}_{\tau} = h^{b'}_{\tau}\omega^{\cdot c'}_{b'}; \tag{34. 23}$$

тогда (34. 22) запишется в виде [2]

$$Q^{\mu}_{\sigma,\tau\cdot} = \overset{\circ}{h}{}^{\mu}_{d'}\overset{\circ}{h}{}^{c'}_{\tau}Q^{(d')}_{\sigma,(c')\cdot} = \overset{\circ}{h}{}^{\mu}_{d'}\overset{\circ}{h}{}^{c'}_{\tau}Q^{d'}_{\sigma,c'\cdot}, \tag{34. 24}$$

где $Q^{\mu}_{\sigma,\,\tau\cdot}$ — коэффициенты вращения, отнесенные к произвольной координатной сетке. Так как в выражении (34. 24) все локальные ортогональные индексы свернуты, то оно является B-инвариантным и, следовательно, в целом (34. 21) также B-инвариантно. Коэффициенты вращения (34. 24) описывают поворот инвариантных базисных тетрад при смещениях в общековариантной, относительно преобразований группы (A) и (B), форме.

Из равенства (34. 21) находим значение ковариантной производной аффинора

$$\nabla_{\sigma}\Theta^{\cdot a}_{\tau} = Q^{\mu}_{\sigma,\tau\cdot}\Theta^{\cdot a}_{\mu}. \tag{34. 25}$$

Подставляя (34. 21) в (34. 14), получаем

$$\frac{dV^{\mu}}{ds} + \{\Gamma^{\mu}_{\sigma\tau} + Q^{\mu}_{\sigma,\tau\cdot}\}\, V^{\sigma}V^{\tau} = \Theta^{\mu}_{\cdot a}\overset{\circ}{W}{}^{a}; \tag{34. 26}$$

отсюда для ускорения частицы относительно НСО (S') находим следующее выражение:

$$\frac{DV^{\mu}}{ds} = W^{\mu}_{(ak)} - W^{\mu}_{(in)}, \tag{34. 27}$$

где, как обычно,

$$\frac{DV^{\mu}}{ds} = \frac{dV^{\mu}}{ds} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\tau}V^{\sigma}V^{\tau} \tag{34. 28}$$

— ускорение в НСО (S'). Далее

$$W^{\mu}_{(ak)} = \Theta^{\mu}_{\cdot a}\overset{\circ}{W}{}^{a} \tag{34. 29}$$

— активное ускорение, обусловленное силами, действующими на частицу, и

$$W^{\mu}_{(in)} = Q^{\mu}_{\sigma,\tau\cdot}V^{\sigma}V^{\tau} \tag{34. 30}$$

— инерционное ускорение, обусловленное движением базиса НСО. Последнее видно из того, что коэффициенты вращения $Q^{\mu}_{\sigma,\,\tau\cdot}$, как мы отмечали, описывают движение инвариантной тетрады, т. е. базиса НСО. Совершенно очевидно, что акселерометр, на ко-

---

[1] Когда координатные и инвариантные тетрады совпадают, т. е. в случае собственной B-градуировки, например в случае (34.6).

[2] Индексы в скобках (инвариантные) мы заменили, согласно (34. 18), на ортогональные координатные.

торый не действует силовое поле, связанный с частицей, покажет ускорение $W^{\mu}_{(ak)}$, но не $W^{\mu}_{(in)}$. Если окажется, что силовое поле, обусловливающее неинерциальное движение базиса НСО, действует так же и на пробную частицу, за которой мы наблюдаем, и сообщает ей в каждой точке такое же ускорение, как и базису [1], например в случае ньютоновского гравитационного поля, то тогда

$$W^{\mu}_{(ak)} - W^{\mu}_{(in)} = 0. \qquad (34.31)$$

Это значит, что относительное ускорение (относительно НСО) равно нулю, т. е. имеет место «невесомость», и из (34. 27) в этом случае получаем закон движения пробной частицы в виде уравнения геодезической

$$\frac{DV^{\mu}}{ds} = 0; \qquad (34.32)$$

здесь активное ускорение компенсируется инерционным.

35. Описание некоторых явлений в НСО

Пространство-время НСО является искривленным, поэтому наблюдатели, находящиеся в НСО, будут регистрировать некоторые дополнительные эффекты, в сравнении с теми, которые имелись в ИСО. Ниже рассмотрим некоторые из них. А сейчас приведем ряд конкретных примеров метрик НСО в различных системах координат.

Квазигалилеева система координат. Рассмотрим два случая.

Общий случай. Согласно (32. 24), находим

$$ds^2 = \frac{1}{u_0^2}(dX^0)^2 - (\delta_{km} + u_k u_m)\, dX^k dX^m, \qquad (35.1)$$

где величины u^a — компоненты 4-скорости базисных тел НСО относительно ИСО — удовлетворяют равенству

$$\eta_{ab} u^a u^b = 1. \qquad (35.2)$$

Частный случай. Базисные тела НСО движутся параллельно оси X^1 ИСО. При этом $u_2 = u_3 = 0$, тогда

$$ds^2 = \frac{1}{u_0^2}(dX^0)^2 - u_0^2 (dX^1)^2 - (dX^2)^2 - (dX^3)^2. \qquad (35.3)$$

В качестве приложения этой метрики рассмотрим случай равноускоренной НСО. Пусть вдоль оси X^1 направлено однородное электростатическое поле. Если m — масса базисного тела, q — его заряд, то поле скоростей, описывающее движение базиса, имеет вид [2]

$$u^0 = \operatorname{ch} k\overset{\circ}{s} = \sqrt{1 + (kX^0)^2}, \qquad u^1 = \operatorname{sh} k\overset{\circ}{s} = kX^0, \qquad k = qE/mc^2. \qquad (35.4)$$

---

[1] В случае электромагнитного поля отношение заряда к массе должно быть одинаковым как у пробной частицы, так и у базисного тела.

[2] Это случай так называемого гиперболического движения, мировыми линиями здесь являются гиперболы.

Тогда в соответствии с (35. 3) интервал в пространстве-времени равноускоренной НСО запишется

$$ds^2 = \frac{(dX^0)^2}{1+(kX^0)^2} - [1+(kX^0)^2](dX^1)^2 - (dX^2)^2 - (dX^3)^2. \quad (35.5)$$

Компоненты метрического тензора имеют следующий вид:

$$g_{00} = \frac{1}{g^{00}} = \frac{1}{1+(kX^0)^2}, \qquad g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = -[1+(kX^0)^2], \qquad (35.6)$$
$$g_{22} = g^{22} = g_{33} = g^{33} = -1;$$

остальные, не выписанные, компоненты равны нулю. Отличные от нуля символы Кристоффеля могут быть представлены таким образом:

$$\Gamma^1_{01} = -\Gamma^0_{00} = \frac{k^2X^0}{1+(kX^0)^2}, \qquad \Gamma^0_{11} = k^2X^0[1+(kX^0)^2]. \qquad (35.7)$$

Вычисляя теперь тензор кривизны, согласно (3. 34), легко убедиться, что из всех компонент тензора отличной от нуля оказывается только одна (с точностью до перестановки индексов)

$$R^1_{010\cdot} = \frac{k^2}{1+(kX^0)^2}, \qquad (35.8)$$

или, опуская контравариантный индекс, получим

$$R_{0101} = -k^2. \qquad (35.9)$$

Из (35. 4) мы видим, что k — пропорционально напряженности электрического поля, поэтому формально можно сказать, что кривизна определяется этим полем. Но это было бы не совсем точно. В действительности, как мы знаем, непосредственной причиной искривления являются локальные лоренцевы сокращения и только они. Вопрос же о том, каким конкретно силовым полем обусловлено неинерциальное движение базиса, является в значительной мере второстепенным.

Сферическая система координат. Подвергнем галилееву систему X^a в ИСО (и, следовательно, квазигалилееву систему X^a в НСО) следующему преобразованию:

$$X^0 = x^0, \qquad X^1 = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$X^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad X^3 = r\cos\theta. \qquad (35.10)$$

Тогда, пользуясь известными коэффициентами A^μ_a, A^a_μ, принадлежащими ИСО, с помощью обычных соотношений

$$g_{\mu\nu} = g_{ab}A^a_\mu A^b_\nu, \qquad u_\mu = u_a A^a_\mu, \qquad u^\mu = u^a A^\mu_a \qquad (35.11)$$

получим выражения для компонент метрического тензора:

$$g_{00} = \frac{1}{u_0^2}, \qquad g_{rr} = -\{1+(u^r)^2\}, \qquad g_{\theta\theta} = -r^2\{1+r^2(u^\theta)^2\},$$
$$g_{\varphi\varphi} = -r^2\sin^2\theta\{1+r^2\sin^2\theta(u^\varphi)^2\}, \qquad g_{r\theta} = -r^2u^ru^\theta, \qquad (35.12)$$
$$g_{r\varphi} = -r^2\sin^2\theta u^ru^\varphi, \qquad g_{\theta\varphi} = -r^4\sin^2\theta u^\theta u^\varphi, \qquad g_{0k} = 0;$$

при этом вместо равенства (35. 2) в сферических координатах имеем

$$(u^0)^2 - (u^r)^2 - r^2 (u^\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (u^\varphi)^2 = 1. \qquad (35.13)$$

Теперь рассмотрим несколько выражений для интервала в НСО, записанных в «сферической» системе координат [1].

Общий случай.

$$ds^2 = \frac{1}{u_0^2}(dx^0)^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + \\ + 2g_{r\theta}drd\theta + 2g_{r\varphi}drd\varphi + 2g_{\theta\varphi}d\theta d\varphi, \qquad (35.14)$$

где компоненты метрического тензора следует взять из (35. 12).

Сферически симметричная НСО. В этом случае силовое поле обладает сферической симметрией, а тела базиса имеют только радиальную скорость. Полагая в (35. 12) $u^\theta = u^\varphi = 0$, с помощью (35. 13), (35. 14) имеем

$$ds^2 = \frac{1}{u_0^2}(dx^0)^2 - u_0^2 dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \qquad (35.15)$$

Выражая u_0 через 3-скорость относительного движения $\beta = v/c$, находим

$$ds^2 = (1 - \beta^2)(dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1-\beta^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \qquad (35.16)$$

Если мы заменим β^2 приближенным выражением $\beta^2 \approx -2\varphi_H/c^2 = 2r_0/r, r_0 = \varkappa M/c^2$ (как это сделал Ленц), то получим метрику Шварцшильда. Однако сходство будет чисто внешнее, ибо по своей природе выражение (35. 16) глубоко отличается от своего аналога в ОТО.

В случае решения Шварцшильда [2] имеется сингулярная сфера, при переходе через которую изменяется смысл величин dx^0 и dr.

В случае (35. 16) величина β^2 ни при каких условиях не сделается равной единице и тем более не превзойдет ее (постулат СТО).

Действительно, запишем, согласно СТО, интеграл энергии для тела массы m, движущегося в ньютоновом (аналогично будет и в кулоновом) поле, порожденном массой M,

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\varkappa mM}{r}; \qquad (35.17)$$

вводя безразмерную величину $\varepsilon = W/mc^2$, находим

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{(\varepsilon + r_0/r)^2}. \qquad (35.18)$$

---

[1] Мы слово «сферической» взяли в кавычки, так как относительно метрики НСО координаты r, θ, φ уже не имеют того простого смысла, которым они обладают в ИСО.

[2] Это решение относится только к гравитационному полю, в то время как метрика (35. 15) имеет место в силовом поле любой природы, лишь бы оно обладало сферической симметрией и базис имел только радиальные скорости.

В этом случае никакой сингулярности в (35. 18) вообще не существует. Сингулярность в метрике (35. 16) будет в пределе при $r=0$, недостижимом для реального тела, ибо тогда $\beta=1$, т. е. $v=c$.

Планетарная система отсчета. В этом случае тела базиса НСО движутся по орбитам, лежащим в одной плоскости, вокруг силового центра. Систему координатных тетрад и координат в ИСО можно выбрать так, чтобы $u^\theta=0$, тогда

$$ds^2=\frac{1}{u_0^2}(dX^0)^2-\{1+(u^r)^2\}\,dr^2-r^2d\theta^2-$$
$$-r^2\sin^2\theta\,\{1+r^2\sin^2\theta\,(u^\varphi)^2\}\,d\varphi^2-2r^2\sin^2\theta u^r u^\varphi dr d\varphi. \tag{35. 19}$$

Если орбиты будут круговые, т. е. если в выражении (35. 19) $u^r=0$, получим

$$ds^2=\frac{1}{u_0^2}(dX^0)^2-dr^2-r^2d\theta^2-r^2u_0^2\sin^2\theta d\varphi^2. \tag{35. 20}$$

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых частных случаев движения в неинерциальных системах отсчета. При этом ограничимся ради простоты описанием движения в центрально-симметричном поле относительно НСО, имеющей тот же характер симметрии. Мы рассмотрим одновременно два аналогичных случая центрально-симметричного поля. Во-первых, электростатическое поле, порожденное точечным зарядом, 4-вектор потенциал которого в ИСО имеет вид

$$A_0=-q/r, \qquad A_1=A_2=A_3=0. \tag{35. 21}$$

Во-вторых, гравитационное поле точечной массы, которое будем также рассматривать как векторное с 4-вектором потенциалом в виде

$$A_0=-\varkappa M/r, \qquad A_1=A_2=A_3=0. \tag{35. 21a}$$

Как известно, релятивистские астрономические эффекты, рассчитанные с этим потенциалом, для наблюдателя, находящегося в инерциальной системе отсчета в СТО, оказываются для отклонения луча света солнцем в два раза, а для смещения перигелия планет в шесть раз меньшими, чем в ОТО. Однако снова рассмотрим эти эффекты в поле (35.21а), но уже для наблюдателя, находящегося в НСО, базисом которой являются тела, либо падающие на притягивающий центр, либо удаляющиеся от него.

На этом примере проследим, к каким дополнительным эффектам приводит неинерциальность системы отсчета.

Поле скоростей базиса и метрика центрально-симметричной НСО. Переходя к сферической системе координат, согласно (35.10), для определения поля скоростей базиса НСО запишем уравнения Гамильтона—Якоби в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial \mathring{S}}{\partial X^0}-\frac{r_0}{r}\right)^2-\left(\frac{\partial \mathring{S}}{\partial r}\right)^2-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \mathring{S}}{\partial \theta}\right)^2-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{d\mathring{S}}{\partial \varphi}\right)^2=1, \tag{35. 22}$$

где

$$\mathring{S} = \mathring{\Phi}/m_0 c, \qquad r_0 = \frac{qq'}{m_0 \cdot c^2} \quad \text{или} \quad r_0 = \frac{\varkappa M}{c^2}.$$

В рассматриваемом случае функция действия $\mathring{S}$ будет зависеть только от X^0 и r (сферическая симметрия)

$$\mathring{S} = -\varepsilon X^0 + \int u_1(r)\, dr, \qquad \varepsilon = W/m_0 c^2. \tag{35.23}$$

Компоненты поля скоростей базисных тел НСО относительно исходной ИСО будут иметь следующий вид:

$$u_0 = \varepsilon + \frac{r_0}{r}, \quad u_1 = \mp \left\{\left(\varepsilon + \frac{r_0}{r}\right)^2 - 1\right\}^{1/2}, \quad u_2 = u_3 = 0. \tag{35.24}$$

Потребуем теперь, чтобы на больших расстояниях от центра ($r \to \infty$) базис НСО переходил в базис исходной ИСО, т. е. поле скоростей u_μ переходило в следующее однородное поле:

$$u_0 = 1, \qquad u_k = 0, \qquad k = 1,\ 2,\ 3; \tag{35.25}$$

тогда из (35. 24) следует, что константа $\varepsilon = 1$, и мы окончательно получаем поле скоростей базиса НСО в виде

$$u_0 = 1 + \frac{r_0}{r}, \quad u_1 = \mp \left\{\left(1 + \frac{r_0}{r}\right)^2 - 1\right\}^{1/2}, \quad u_2 = u_3 = 0. \tag{35.26}$$

Интервал, согласно (35. 15), тогда запишется[1]

$$ds^2 = \frac{(dX^0)^2}{(1 + r_0/r)^2} - \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)^2 dr^2 - r^2 (d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \tag{35.27}$$

Кеплерова задача в сферически симметричной НСО. Уравнение Гамильтона—Якоби, описывающее в НСО движение пробного тела вокруг притягивающего центра, запишется[2]

$$g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} + \tilde{A}_\mu\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} + \tilde{A}_\nu\right) = 1, \tag{35.28}$$

где $S = \Phi/m_0 c$ и $\tilde{A}_\mu$ есть 4-вектор потенциал в НСО. Его мы определим следующим образом:

$$\tilde{A}_\mu = \Theta_{\mu}^{\cdot\sigma} A_\sigma, \qquad A_\sigma = \left\{-\frac{r_0}{r}, \quad 0,\ 0,\ 0\right\}. \tag{35.29}$$

Преобразующий аффинор (33. 23) в данном случае представляется в виде

$$\Theta_{\mu}^{\cdot\sigma} = \begin{pmatrix} \Theta_0^{\cdot 0} & \Theta_m^{\cdot 0} \\ \Theta_0^{\cdot k} & \Theta_m^{\cdot k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -u_0 u_m \\ \dfrac{u^k}{u_0} & \delta_m^k - u^k u_m \end{pmatrix}, \tag{35.30}$$

---

[1] Легко видеть, что с точностью до членов r_0/r эта метрика формально совпадает со шварцшильдовой.

[2] Для случая частицы в кулоновом поле.

где компоненты u_μ и $u^\mu = \overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu} u_\nu$ следует взять из (35. 26), а компоненты $\overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu}$ метрики ИСО, в которой введена сферическая система координат, следует положить равными

$$\overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu} = \operatorname{diag}\left\{+1, \ -1, \ -\frac{1}{r^2}, \quad -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right\}. \tag{35. 31}$$

Тогда для компонент (35. 29) получим следующие значения:

$$\tilde{A}_\mu = -\frac{r_0}{r}\, \Theta_\mu^{\cdot 0} = \left\{-\frac{r_0}{r}, \ \frac{r_0}{r} u_0 u_1, \ 0, \ 0\right\}. \tag{35. 32}$$

При этом компоненты $g^{\mu\nu}$ метрики НСО запишутся в виде

$$g^{00} = u_0^2, \qquad g^{11} = -\frac{1}{u_0^2}, \qquad g^{22} = g^{33} = -\frac{1}{r^2}. \tag{35. 33}$$

Мы положили здесь $\theta = \pi/2$, т. е. движение, как обычно, рассматривается в экваториальной «плоскости». Выбрав функцию действия обычным образом

$$S = -\varepsilon X^0 + \int f(r)\, dr + \lambda\varphi, \qquad \lambda = \frac{L}{m_0 c}, \tag{35. 34}$$

определим компоненты скорости частицы по формуле

$$V_\mu = -\left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} + \tilde{A}_\mu\right), \tag{35. 35}$$

которая приводит к следующим результатам:

$$V_0 = \varepsilon + \frac{r_0}{r}, \qquad V_1 = -\left\{f(r) + \frac{r_0}{r} u_0 u_1\right\}, \qquad V_2 = 0, \qquad V_3 = -\lambda. \tag{35. 36}$$

Радиальная функция $f(r)$ найдется из (35. 34) и (35. 28)

$$f(r) = \left\{u_0^4\left(\varepsilon + \frac{r_0}{r}\right)^2 - u_0^2 - \frac{\lambda^2}{r^2} u_0^2\right\}^{1/2} - \frac{r_0}{r} u_0 u_1. \tag{35. 37}$$

Введем новую переменную r_1 таким образом:

$$\frac{r}{r_1} = 1 + \frac{r_0}{r}, \qquad dr = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(1 + \frac{2r_0}{r_1}\right)\left(1 + \frac{4r_0}{r_1}\right)^{-1/2}\right\} dr_1;$$

тогда с точностью до членов второго порядка малости относительно r_0/r_1 выражение (35. 37) запишется

$$f(r_1) = f_0(r_1) \pm \frac{r_0}{r_1}\left(\frac{2r_0}{r_1} - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right)^{1/2}, \tag{35. 38}$$

где

$$f_0(r_1) = \left\{\varepsilon^2 - 1 + 2(2\varepsilon^2 + \varepsilon - 1)\frac{r_0}{r_1} + (2\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 2)\frac{r_0^2}{r_1^2} - \frac{\lambda^2}{r_1^2}\right\}^{1/2}. \tag{35. 39}$$

Для приведения радиальной функции $f(r_1)$ к стандартному виду, который она имеет в кеплеровой задаче в СТО, проделаем следующее преобразование:

$$f^2(r_1) = f_0^2(r_1) \pm 2\frac{r_0}{r_1} f_0(r_1)\left(\frac{2r_0}{r_1} - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right)^{1/2} + \ldots; \qquad (35.40)$$

далее с той же степенью точности находим

$$z = 2\frac{r_0}{r_1} f_0(r_1)\left(\frac{2r_0}{r_1} - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right)^{1/2} =$$

$$= 2\frac{r_0}{r_1}\left\{2(\varepsilon^2 - 1)\frac{r_0}{r_1} + (8\varepsilon^2 + 4\varepsilon - 4)\frac{r_0^2}{r_1^2} - \frac{2r_0\lambda^2}{r_1^3} + \ldots\right\}^{1/2}. \qquad (35.41)$$

Для оценки этого выражения мы можем воспользоваться следующими равенствами:

$$\varepsilon = 1 - \frac{r_0}{2a} + \ldots, \qquad \varepsilon^2 = 1 - \frac{r_0}{a} + \ldots, \qquad \lambda^2 = ar_0(1 - e^2) + \ldots, \qquad (35.42)$$

имеющими место при релятивистском кеплеровом движении относительно инерциальной системы отсчета в СТО. Здесь a — большая полуось эллипса, e — его эксцентриситет. Тогда для (35. 41) находим

$$z = 4\alpha(r_1)\frac{r_0^2}{r_1^2}, \qquad \alpha(r_1) = \left\{2 - \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{a} + (1 - e^2)\frac{a}{r_1}\right)\right\}^{1/2}. \qquad (35.43)$$

Подставляя это в (35. 40), для радиальной функции получаем следующее выражение:

$$f(r_1) = \left\{\varepsilon^2 - 1 + 2(2\varepsilon^2 + \varepsilon - 1)\frac{r_0}{r_1} - [\lambda^2 - (10 \pm 4\alpha(r_1))r_0^2]\frac{1}{r_1^2}\right\}^{1/2}. \qquad (35.44)$$

Как известно, коэффициент при $1/r_1^2$, равный

$$\lambda^2 - (10 \pm 4\alpha(r_1))r_0^2, \qquad (35.45)$$

описывает смещение перигелия частицы. Для оценки смещения подставим в выражение $\alpha(r_1)$ значения r_1 и $1/r_1$, усредненные по области изменения r_1 от $r_{min} = a(1-e)$ до $r_{max} = a(1+e)$.

Усреднение дает

$$\langle r_1\rangle = a, \qquad \left\langle\frac{1}{r_1}\right\rangle = \frac{1}{2ea}\ln\frac{1+e}{1-e} \approx \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{3}e^2\right). \qquad (35.46)$$

После подстановки этих значений в (35. 43) получаем

$$\alpha = 1 + \frac{1}{6}e^2\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) + \ldots \qquad (35.47)$$

Для примера возьмем $e = 0{,}2$ [1], тогда $\alpha \approx 1{,}01$ и смещение перигелия за один оборот получает следующее значение:

$$\Delta\varphi = 2\pi(5 \pm 2)\frac{r_0^2}{\lambda^2}, \qquad \Delta\varphi_+ = 14\pi\frac{r_0^2}{\lambda^2}, \qquad \Delta\varphi_- = 6\pi\frac{r_0^2}{\lambda^2}. \qquad (35.48)$$

[1] Эксцентриситет Меркурия.

Разберемся теперь в полученных результатах. Тот факт, что коэффициент (35. 45) зависит, хотя и слабо, от r_1, показывает, что скорость смещения перигелия непостоянна.

Далее, двойной знак в (35. 49) есть следствие двойного знака у компоненты u_1 — радиальной скорости движения базисных тел НСО — и, следовательно, наблюдателя.

Таким образом, для наблюдателя, падающего на центр, смещение перигелия будет $\Delta\varphi_-$; для наблюдателя, удаляющегося от центра, получаем $\Delta\varphi_+$.

Движение по геодезической в сферически симметричной НСО. В случае гравитационного поля, когда активное ускорение компенсируется инерционным (34. 31), движение пробной частицы описывается уравнением геодезической (34. 32). Мы имеем, следовательно, случай свободного движения в искривленном пространстве.

Уравнение Гамильтона—Якоби в этом случае запишется в виде

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu}=1, \qquad (35.\,49)$$

где компоненты $g_{\mu\nu}$ следует взять из (35. 33), а функцию действия в виде (35. 34). Проделав затем совершенно аналогичные случаю кеплеровой задачи в сферически симметричной НСО вычисления для радиальной функции, получим следующее выражение:

$$f(r_1)=\left\{(\varepsilon^2-1)+2\,(2\varepsilon^2-1)\frac{r_0}{r_1}-(\lambda^2-3r_0^2)\frac{1}{r_1^2}\right\}^{1/2}. \qquad (35.\,50)$$

Приведем для сравнения соответствующее выражение из ОТО для метрики Шварцшильда

$$f(r_1)=\left\{(\varepsilon^2-1)+2\,(2\varepsilon^2-1)\frac{r_0}{r_1}-(\lambda^2-6r_0^2)\frac{1}{r_1^2}\right\}^{1/2}; \qquad (35.\,51)$$

при этом члены, ответственные за смещение перигелия орбиты, и смещения его запишутся:

$$\left.\begin{aligned}&1)\ \text{НСО} \qquad -\frac{1}{r_1^2}(\lambda^2-3r_0^2), \qquad \Delta\varphi=3\pi\frac{r_0^2}{r_1^2};\\ &2)\ \text{ОТО} \qquad -\frac{1}{r_1^2}(\lambda^2-6r_0^2), \qquad \Delta\varphi=6\pi\frac{r_0^2}{r_1^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (35.\,52)$$

Отклонение луча света, проходящего вблизи поверхности Солнца. В этом случае уравнение Гамильтона — Якоби запишется в виде

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu}=0. \qquad (35.\,53)$$

Однако выражение для радиальной функции $f(r_1)$, содержащей информацию об отклонении луча света, мы получим из выражения (35. 50) гораздо быстрее, рассмотрев ультрарелятивист-

ский случай, когда $\varepsilon \gg 1$. Ограничиваясь в (35. 50) членами первого порядка относительно r_0/r_1, находим

$$f(r_1) = \varepsilon \left\{1 + \frac{4r_0}{r_1} - \frac{r^2_{\min}}{r_1^2}\right\}^{1/2}, \qquad r_{\min} = \frac{\lambda}{\varepsilon}. \tag{35. 54}$$

Отсюда, как легко видеть, для угла отклонения получаем

$$\Delta\varphi = \frac{4r_0}{r_{\min}}, \tag{35. 55}$$

что совпадает с результатом ОТО.

Итак, приведенные примеры наглядно показывают, сколь значителен вклад, вносимый в релятивистские эффекты кривизной пространства-времени НСО. Следовательно, правильный выбор системы отсчета имеет весьма существенное значение.

Система отсчета должна определяться не соображениями удобства [1], а в соответствии с теми конкретными условиями, в которых находятся средства наблюдения и наблюдатель, желающий получить предварительные данные о величине интересующего его эффекта.

---

[1] Как это имеет место в случае выбора координатной сетки или координатных тетрад.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная тетрадная формулировка ОТО, хотя и позволила более корректно поставить и решить ряд задач, снова оказалась не свободной от трудностей, связанных с нековариантностью. Здесь эта B-нековариантность[1] результатов существенным образом отличается от A-нековариантности, имеющей место в обычной метрической формулировке ОТО.

Очень часто B-нековариантность, особенно нековариантность относительно локальных гиперболических вращений, пытаются объяснить переходом к новым физическим условиям — к неинерциальной системе отсчета. Однако детальное рассмотрение свойств ИСО и НСО показало, что любая B-нековариантность есть такая же трудность теории, как и A-нековариантность.

Это положение, как показали многие дискуссии, оказалось весьма трудным для понимания.

Охотно соглашаются с тем, что допустима любая нумерация мировых точек, что можно преобразованием координат переходить от одной нумерации к другой, даже нестационарной, т. е. зависящей от времени, и что это не есть переход к новой системе отсчета.

Также легко соглашаются с возможностью произвольного и даже локального выбора начальных направлений для отсчета углов, например для отсчета трех углов Эйлера. Не возражают и против того, что локальные вращения декартовых триад описывают только переход к новым начальным направлениям в одной и той же системе отсчета.

Сомнение возникает тогда, когда предлагается считать допустимым выбор нестационарных начальных направлений для отсчета углов. Возражая, обычно говорят, что реализация нестационарных направлений связана с вращением некоторых тел и, следовательно, с переходом к вращающейся системе отсчета.

Далее, сомнения значительно усиливаются, когда предлагается считать допустимым локальный выбор начал отсчета отно-

[1] Т. е. нековариантность результатов относительно локальных лоренцевых преобразований, группа (B). A-нековариантность — это нековариантность результатов относительно произвольных преобразований координат, группа (A).

сительных скоростей в одной и той же (даже инерциальной) системе отсчета, а локальные преобразования Лоренца рассматривать как переход от одних локальных начал отсчета скоростей к другим (в одной и той же системе отсчета).

Наконец, сомнения становятся наибольшими, когда предлагается в одной и той же системе считать допустимым выбирать не только локальные, но и нестационарные начала отсчета скоростей, даже в ИСО.

Возражая против этого положения, говорят, что зависимость скорости от времени указывает на наличие ускорения, и, следовательно, переход к нестационарному полю скоростей означает переход к новой, уже неинерциальной, системе отсчета.

По-видимому, все сомнения возникают в основном потому, что часто смешивают два существенно различных понятия. С одной стороны, это физически выделенные[1] направления и пространственно-временные точки, с другой — это числа, которые сопоставляются в результате градуировок (калибровок) этим направлениям и точкам. Рассмотренные в разделах 26—27 A- и B-градуировки систем отсчета имеют отношение только к числам. Группы преобразований (A) и (B), т. е. произвольные преобразования координат и локальные вращения координатных тетрад (локальные преобразования Лоренца), изменяют только числа, сопоставленные мировым точкам и физически выделенным направлениям. Переход от одной системы отсчета к другой связан прежде всего с переходом от одного базиса к другому, т. е. от одной физической ситуации к другой, поэтому преобразования групп (A) и (B) по самому своему смыслу не могут описывать переходы между системами отсчета.

В этом месте скептик обязательно задаст следующий вопрос: хотя рассуждения автора как будто логичны, но все это только слова, и я возможно поверю им, если будет указано, как можно аналитически отличить преобразования, связывающие два различных поля координатных тетрад, группа (B), от преобразований, связывающих два различных поля инвариантных тетрад, отображающих базисы двух различных НСО?

В последней главе (см. раздел 31) подробно рассмотрены аналитические свойства перенесения, т. е. закона изменения инвариантных (31. 3) и координатных (31. 27) тетрад, при переходе от одной точки к другой, бесконечно близкой.

Эти законы перенесения, как было видно, имеют существенно различную природу. В случае инвариантных тетрад перенесение является неголономным; это значит, что поле инвариантных тетрад может быть построено лишь шаг за шагом вдоль заданного пути. Иначе говоря, закон перенесения может быть проинтегрирован только в том случае, если будет указан путь. Поэтому ре-

---

[1] С помощью различных устройств, лучей света, гироскопов, силовых полей и т. д.

зультат переноса зависит от выбора пути. При переносе тетрады по замкнутому пути она не возвращается в исходное положение — оказывается повернутой. Аналитически неголономность перенесения характеризуется тензором неголономности перенесения (31. 7), который здесь отличен от нуля.

Еще раз можно подчеркнуть тот хорошо известный факт, что законом движения задается не поле скоростей, а только закон изменения скорости вдоль мировой линии, который при наличии силового поля является неголономным.

В случае преобразований группы (B) коэффициенты преобразования $\omega^{a}_{\cdot b}(X)$ являются однозначными функциями точки, не зависят ни от каких начальных условий и реализуют, как мы раньше отмечали, произвольный выбор в каждой мировой точке начала отсчета углов и скоростей, отображая тем самым принцип относительности направлений и скоростей. Здесь закон перенесения (31. 27), собственно, выводится из уже построенного с помощью преобразований группы (B) поля тетрад, он лишь фиксирует факт их изменения при переходе от точки к точке. Поэтому при переносе тетрады по замкнутому контуру она, конечно, возвращается в исходное положение. Аналитически этот факт отображается тождественным, относительно $\omega^{a}_{\cdot b}(X)$, обращением в нуль тензора неголономности перенесения, т. е. перенесение (81. 27) голономно.

Что же все-таки представляет собой ОТО, почему она, будучи безукоризненно сформулированной аналитически, приводит к результатам, противоречащим ее исходным положениям (см. раздел 23)?

Сейчас, как и прежде, еще нельзя дать окончательный ответ, ибо пока нет более совершенной теории гравитации, чем ОТО. Однако воспользовавшись тем, что получено при изучении свойств НСО, можно высказать некоторые предварительные соображения, степень достоверности которых будет, очевидно, зависеть от достоверности описания систем отсчета.

При рассмотрении свойств НСО у читателя может сложиться впечатление, что в последних разделах незаметным образом совершен переход от СТО к ОТО, поскольку пространство-время НСО оказалось искривленным. Отсюда лишь один шаг до заключения, что ОТО есть СТО, сформулированная в НСО, т. е. относительно неинерциально движущегося наблюдателя. Но такое заключение было бы неправомерным. Действительно, в последнем разделе рассмотрено гравитационное поле, которое приближенно в СТО описывается 4-вектором потенциала (35. 21б). При переходе к НСО, т. е. в искривленное пространство-время, 4-вектор потенциала как будто исчезает. Во всяком случае явно гравитационное поле как некоторое силовое в уравнение движения не входит, поскольку последнее есть уравнение геодезической (34. 32). В этом действительно имеется аналогия с ОТО.

Но в случае ОТО, как известно, никакого силового гравитационного поля вообще нет, есть лишь кривизна пространства-времени, порожденная движущимися массами. Поэтому чтобы перейти от нашего случая к ОТО, следовало бы каким-то образом исключить из рассмотрения 4-вектор потенциала с самого начала, т. е. исключить из теории как не имеющее смысла силовое гравитационное поле. Но, ликвидировав потенциал, лишаемся возможности определить поле скоростей базиса НСО и, следовательно, метрику искривленного пространства-времени, т. е. лишаемся как раз того, что как-то объединяет нас с ОТО. Без силового гравитационного поля формализм, изложенный в последнем разделе, не работает.

В ОТО, где гравитационное поле как силовое исключено, метрика пространства-времени определяется гравитационными уравнениями Эйнштейна, представляющими собой основной постулат ОТО; при этом метрический тензор содержит информацию как о гравитационном поле, так и о неинерциальной системе отсчета, движение базиса которой задается неявно правой частью уравнений Эйнштейна. К сожалению, в рамках ОТО до сих пор нельзя ковариантно разделить эффекты НСО и гравитации.

Если теперь попытаться описать энергию, импульс и момент гравитационного поля в ОТО, т. е. ввести физические понятия, требующие существования силового поля, то сейчас же возникнут хорошо известные трудности.

Говорят, что непреодолимой нековариантностью результатов ОТО природа, на языке анализа, нам все время хочет что-то сказать, но мы никак не можем понять, что именно.

Возможно, правильнее будет это отнести не к природе, а к самой ОТО, тогда нековариантностью результатов она нам хочет, очевидно, сказать: «не требуйте от меня того, чего не заложили при формулировке».

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Эйнштейн.* Собр. науч. трудов, т. 1. М., «Наука»,1965, стр. 242.
2. *П. К. Рашевский.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., «Наука», 1967.
3. *А. П. Норден.* Пространства аффинной связности. М.—Л., ГИТТЛ, 1950.
4. *В. И. Родичев.* ЖЭТФ, 1961, **40**, вып. 5, 1469.
5. *И. А. Схоутен, Д. Д. Стройк.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 2. М., ГИИЛ, 1948.
6. *Д. Синг.* Общая теория относительности. М., ИЛ, 1963.
7. *Х. Меллер.* Ann. Physics, 1958, **4**, 347.
8. *Н. В. Мицкевич.* Ann. Physik, 1958, **1**, 319.
9. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. Физматгиз, 1962.
10. *Ю. Б. Румер.* Исследования по 5-оптике. М., ГИТТЛ, 1956.
11. *В. И. Родичев.* Изв. вузов, сер. физ., 1963, № 2, стр. 122.
12. *А. Е. Левашев.* Теория лоренцевой связи. Докт. дисс., 1960.
13. *Б. Н. Фролов.* Вестник МГУ, сер. физ.-астрон., 1964, № 2, 56.
14. *C. Möller.* Math. Phys. Skr. Dan. Vid. Selsk., 1961, **1**, N 10.
15. *F. A. E. Pirani.* Bull Acad. polon. sci., math. Acter, 1957, **5**, 143.
16. *T. W. Kibble.* J. Math. and Phys., 1961, **2**, 212.
17. *О. С. Иваницкая.* Обобщенные преобразования Лоренца и их применение. Минск. «Наука и техника», 1969.
18. *А. Е. Левашов, О. С. Иваницкая.* Acta Phys. Polonica, 1963, **23**, 647.
19. *А. М. Траутман.* В кн. «Эйнштейновский сборник, 1967». М., «Наука», 1968, стр. 308.
20. *В. А. Фок, Д. Д. Иваненко.* Compt. Rend., 1929, **188**, 1470.
21. *А. Лихнерович.* Теория связностей в целом и группы голономий. М., ИЛ, 1960.
22. *А. Л. Зельманов.* Докл. АН СССР, 1956, **107**, 815; Труды VI совещания по вопросам космогонии. М., Изд-во АН СССР, 1959.
23. *В. Д. Захаров.* Докл. АН СССР, 1965, **161**, 563.
24. *Э. Я. Малдыбаева.* Изв. вузов, сер. физ., 1966, № 6, 118.
25. *F. Pirani.* В сб. «Новейшие проблемы гравитации». Под ред. Д. Д. Иваненко. М., ИЛ, 1961.
26. *А. З. Петров.* Новые методы в общей теории относительности. М., «Наука», 1966.
27. *И. М. Дозморов.* Изв. вузов, сер. физ., 1968, № 3, 90; № 7, 130, 156, № 10, 11.
28. *И. М. Дозморов.* Изв. вузов, сер. физ., 1969, № 9, 43; № 11, 121.
29. *H. Bondi, M. van der Burg, A. Metzner.* Proc. Roy. Soc., 1962, *A* **269**, 21.
30. *H. Bondi.* Nature, 1957, **179**, 1072.
31. *H. Takeno.* Tensor, 1958, **8**, 59.
32. *A. Komar.* Phys. Rev., 1959, **113**, 934.
33. *Г. Денен.* В кн. «Эйнштейновский сборник, 1969—1970». М., «Наука», 1971, стр. 140.
34. *В. Н. Родичев.* В кн. «Эйнштейновский сборник, 1968». М., «Наука», 1969, стр. 115.
35. *Х. П. Керес.* В сб. «Современные проблемы гравитации». Труды 2-й Советской гравитационной конференции 1965 г. Изд. Тбилисского университета, 1967, стр. 25.
36. *К. Телеман.* Элементы топологии и дифференцируемые многообразия. М., «Мир», 1967.
37. *В. И. Родичев., Г. И. Задонский.* Изв. вузов, сер. физ., 1971, № 10, 57.
38. *И. П. Сягло.* Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1971, № 5, 89.
39. *В. Д. Захаров.* Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М., «Наука», 1972.
40. *Г. Мак-Витти.* Общая теория относительности и космология. М., ИЛ, 1961, стр. 118.
41. *А. Эйнштейн.* Собр. науч. трудов, т. 2. М. «Наука», 1966, стр. 85.
42. *А. Эйнштейн.* Собр. науч. трудов, т. 4. М., «Наука», 1966, стр. 283.
43. *A. Lichnerowicz.* Ann. mat. pura ed appl., 1960, **50**, 1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Владимир Иванович Родичев

Теория тяготения в ортогональном репере

Утверждено к печати Московским обществом испытателей природы

Редактор *Н. Н. Бузина*. Редактор издательства *В. П. Сироткина*.
Художественный редактор *Н. Н. Власик*. Технический редактор *Р. Г. Грузинова*

Сдано в набор 20/II 1974 г. Подписано к печати 21/V 1974 г.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2. Усл. печ. л. 11,5.
Уч.-изд. л. 10,7. Тираж 2200. Т-03652. Тип. зак. 982. Цена 65 коп.

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
1-я тип. издательства «Наука», 199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12

Исправления и опечатки

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
21	Ф-ла (3. 13)	$-{}^*\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} g_{\lambda\nu}$	$-{}^*\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} g_{\lambda\mu}$
29	Ф-ла (5. 19)	$\frac{1}{3} R g_{\sigma[\mu} \delta^{\lambda}_{\nu]},$	$\frac{1}{3} R g_{\sigma[\mu} \delta^{\lambda}_{\nu]} + R^{\lambda}_{[\mu} g_{\nu]\sigma},$

В. И. Родичев

65 коп.